ДРЖАВНИ УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ ПАЗАРУ

ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Петар Соколоски

# Простори периодичних дистрибуција, ултрадистрибуција и таласни фронт

Докторска дисертација

Нови Пазар, 2016.

STATE UNIVERSITY OF NOVI PAZAR
DEPARTMENT OF MATEMATHEMATICAL SCIENCES

Petar Sokoloski

# Spaces of Periodic Distributions, Ultradistributions and the Wave Front Set

-doctoral dissertation-

Novi Pazar, 2016

*Mojim voljenim roditeljima*

# Sadržaj

# Zahvalnica

Želim da izrazim najveću zahvalnost svome mentoru Akademiku prof. dr Stevanu Pilipoviću koji me je vodio u toku pisanja doktorske disertacije. Zahvalan sam na njegovom velikom strpljenju, podršci i pomoći koju mi je pružio. Njegovi saveti i pogledi koji su se odnosili kako na matematiku i pisanje naučnih radova, tako i na život, bili su veoma značajni za mene. Takođe sam zahvalan što mi je omogućio učešće na brojnim konferencijama, kongresima, radionicama i seminarima u Novom Sadu. Uvek je bio dostupan za mene i pored brojnih obaveza koje je imao. Iskustvo rada sa njime je bogatstvo neprocenjlive vrednosti.

Takođe, želim da se zahvalim komentoru prof.dr Diani Dolićanin-Đekić čiji su korisni saveti doprineli da ova doktorska disertacija bude još bolja.

Profesoru dr Ćemalu Dolićaninu dugujem veliku zahvalnost zato što je bio uvek dostupan za mene i njegova pomoć oko mog upisa i u toku studija i administracije na Univerzitetu u Novom Pazaru bila je nezamenjliva.

Ne postoje reći koji bi opisali moju zahvalnost mojim roditeljima Jordanu i Peni i bratu Antoniu za njihovu bezrezervnu ljubav, toplinu, strpljenje i podršku u najtežim trenucima. Bili su uz mene kroz čitav moj život, uvek su znali kako da me raspolože i oni su najzaslužniji za ovo.

Mojoj supruzi Jasmini se posebno zahvaljujem za njenu nesebičnu podršku, ljubav i pomoći. Radeći na ovoj disertaciji njoj, sinu Jordanu i ćerki Jovani sam uskratio mnogo zajedničkih trenutaka i za to im mnogo dugujem. Oni su najveća radost i sreća u mom životu.

Zahvaljujem se i prof.dr Ljupču Nastovskim koji je bio mentor moje magisterske teze i koji me je savetovao da produžim rad sa profesorom Pilipovićem. Velika čast za mene je što je on moj veliki prijatelj. Njegova podrška i saveti su bili dragoceni. Retki su ljudi poput njega - čistog srca, puni razumevanja i uvek voljni da pomognu.

Mojim kolegama iz IM i celog PMF-a iz Skoplja, posebno prof. dr Borku

Ilijevskim i dekanu prof. dr Icku Đorgovskim zahvalan sam za podršku koju su mi dali i razumevanje koje su imali tokom ovih godina.

Rođacima Petru, Đorđiju, Stojančetu, Micetu i Tini Nusevim kao i Olgi Sokoloskom i Slavici Sretenoskom sam zahvalan na ljubavi, pažnji, pomoći i podršci koju su mi pružili.

Zahvaljujem se i svim mojim i prijateljima, posebno Zoranu, Aneti, Toniju, Žarku i kumu Vladimiru koji su mi bili velika moralna podrška.

Na kraju, velika zahvalnost Ministarstvu za obrazovanje i nauku Republike Makedonije i organizaciji DAAD koji su mi omogučili finansiranje istraživačkih poseta i učešće na školama i seminarima u Novom Sadu.

# Rezime

Koristeći ideje i metode koje su prisutne kod definisanja proizvoda temperiranih distribucija kod sekvencijalnog pristupa Mikusinskog, dokazaćemo neke osobine proizvoda periodičnih distribucija i ultradistribucija. Daćemo karakterizaciju talasnog fronta $WF(f)$ distribucije $f \in \mathscr{D}'$ i dokazaćemo da je nova definicija ekvivalentna sa Hermanderovom definicijom, kao i karakterizaciju Soboljevskog talasnog fronta distribucije $WF_S(f)$. Analogno sekvencijalnom pristupu Mikusinskog za distribucije, definišemo nove fundamentalne nizove glatkih funkcija koje delimo u klase ekvivalencije i te klase nazivamo $s$-ultradistribucijama ($(s)$-za sekvencijalne). Prostore ovih klasa ekvivalencije označavamo sa $\mathscr{U}'^*$, gde je $* = (p!^t)$ ili $* = \{p!^t\}$, $t > 1$. Slično definišemo prostore $s$-temperiranih ultradistribucija $\mathscr{T}'^*$, $\widetilde{s}$- temperiranih ultradistribucija $\widetilde{\mathscr{T}}'^*$. Pokazaćemo da postoji izomorfizam između prostora $\mathscr{T}'^*$, $\widetilde{\mathscr{T}}'^*$ i $\mathscr{S}'^*$, gde su $\mathscr{S}'^{(t)}$ i $\mathscr{S}'^{\{t\}}$ prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea. Na osnovu izomorfizma prostora $\mathscr{T}'^*$, $\widetilde{\mathscr{T}}'^*$ i $\mathscr{S}'^*$ dobijamo izomorfizam prostora $\mathscr{U}'^*$ i $\mathscr{D}'^*$, gde su $\mathscr{D}'^{(t)}$ i $\mathscr{D}'^{\{t\}}$ prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea. Dokazaćemo da su prostori periodičnih $s$-ultradistribucija $\mathscr{U}'^*_{per}$, kao potprostori $s$-temperiranih ultradistribucija, izomorfni sa prostorima $\mathscr{A}'^*_{per}$, gde su $\mathscr{A}'^{(t)}_{per}$ i $\mathscr{A}'^{\{t\}}_{per}$ Berlingovi i Rumijeovi prostori periodičnih ultradistribucija. Daćemo karakterizacije talasnog fronta $WF^{\{t\}}(f)$ distribucije $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}$ i Soboljevskog talasnog fronta $WF_S^{\{t\}}(f)$ ultradistribucije $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}$.

Novi Pazar, 2016. Petar Sokoloski

# Abstract

Following the ideas and the methods which are used in the definition of the product of (tempered) distributions in the Mikusinski's sequential approach to the theory of distributions, we prove some properties of the product of periodic distributions and ultradistributions. We give characterization of the wave front set $WF(f)$ of a distribution $f \in \mathscr{D}'$ and we prove that the new definition is equivalent with the Hörmander's one. Also, we give characterization of the Sobolev wave front set $WF_S(f)$ of a distribution $f \in \mathscr{D}'$. As in the Mikusinski's sequential approach to the theory of distributions, we define new fundamental sequences of smooth functions which form equivalence classes and we name them as $s$-ultradistributions ($s-$ for sequential). The spaces that these equivalence classes form we denote by $\mathscr{U}'^{*}$, where $* = (p!^t)$ or $* = \{p!^t\}$, $t > 1$. Similarly we define the spaces of $s$-tempered ultradistributions $\mathscr{T}'^{*}$, $\widetilde{s}$- tempered ultradistributions $\widetilde{\mathscr{T}'}^{*}$. We show that there exist isomorphisms between the spaces $\mathscr{T}'^{*}$, $\widetilde{\mathscr{T}'}^{*}$ and $\mathscr{S}'^{*}$, where $\mathscr{S}'^{(t)}$ and $\mathscr{S}'^{\{t\}}$ are the spaces of tempered ultradistributions of Beurling and Roumieu types, respectively. On the basis of the isomorphisms between $\mathscr{T}'^{*}$, $\widetilde{\mathscr{T}'}^{*}$ and $\mathscr{S}'^{*}$ we show that there is an isomorphism between the spaces $\mathscr{U}'^{*}$ and $\mathscr{D}'^{*}$, where $\mathscr{D}'^{(t)}$ and $\mathscr{D}'^{\{t\}}$ are the spaces of ultradistributions of Beurling and Roumieu types, respectively. The spaces of periodic $s$-ultradistributions $\mathscr{U}'^{*}_{per}$, as subspaces of the spaces of $s$-tempered ultradistributions are isomorphic to the spaces of periodic ultradistributions $\mathscr{A}'^{*}_{per}$. By using the properties of the product of periodic ultradistributions we give new description of the wave front set $WF^{\{t\}}(f)$ of an ultradistribution $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ in terms of Fourier series coefficients. Also, we give characterization of the Sobolev wave front set $WF_S^{\{t\}}(f)$ of an ultradistribution $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$.

Novi Pazar, 2016 Petar Sokoloski

# Uvod

Uticaj teorije distribucija na matematičku analizu je možda najslikovitije opisan u [93] – ona je jedna od dvaju velikih revolucija u matematičkoj analizi u XX-om veku. Druga revolucija je teorija Lebegove integracije. Uopštene (generalizovane) funkcije ili distribucije su matematički objekti koji su uvedeni kako bi se rešili neki problemi matematičke analize koji nisu mogli biti rešeni korišćenjem neprekidnih funkcija. Pre svega, one su uvedene kao kompletiranje prostora neprekidnih funkcija u odnosu na operaciju diferenciranja. To je prirodno proširenje koje je analogno proširenju skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ sa realnim brojevima kako bi neki problemi koji nemaju rešenje u $\mathbb{Q}$ mogli biti rešeni u $\mathbb{R}$. Na primer, jednačina $x^2 = 2$ nema rešenje u $\mathbb{Q}$, ali rešenja iste jednačine postoje u $\mathbb{R}$. Slično, ako je jedna funkcija lokalno integrabilna, ona ne mora da ima izvod, ali sigurno postoji njen izvod u smislu distribucija (distribucioni izvod). To je naročito važno u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) koje imaju naročitu primenu u fizici i tehnici. Na taj način parcijalne diferencijalne jednačine rešavamo u skupu distribucija, a nakon toga proveravamo svojstva dobijenih rešenja.

Uvođenje distribucija pripisuje se Švarcu[1] nakon njegovih fundamentalnih radova [82] iz 1950. i [83] iz 1951. Za svoj rad [81] koji je napisao 1944. godine on je 1950. dobio Fildsovu medalju - najveće priznanje za rad u matematici. Međutim ima dosta diskusija oko toga ko je prvi definisao distribucije. Interesantan hronološki prikaz je dat u [96], [46] i [47] gde je navedeno da ruska škola (na primer, Geljfand i Šilov u [19]) smatra Soboljeva[2] kao autora koji je prvi uveo uopštene funkcije u eksplicitnoj i prihvaćenoj formi u kojoj se koriste u radovima [90, 89], dok sam Soboljev u [91] navodi

[1]Laurent Schwartz, francuski matematičar, 1915–2002.

[2]Sergej L'vovič Sobolev, sovjetski matematičar, 1908–1989.

da su pre njega u svojim radovima distribucije koristili i Adamar[3], Ris[4] i Bohner[5]. Interesantan je rad Komatsua[6] [44] gde on navodi da je čak Furije[7] u svom radu [17] iz 1822. koristio uopštene funkcije i tako imao uticaj na Hevisajda[8] i Diraka[9] koji su prethodili Švarcu.

Neosporno je da su distribucije doživele najveći razvoj nakon što ih je Švarc sistematski obradio i insistirao na mogućnosti njihove primene u mnogim oblastima. Teorija distribucija je dala veoma značajne rezultate, među kojima je jedan od najvažnijih teorema Malgranža[10] i Erenprajsa[11] koju su nezavisno jedan od drugog dokazali 1953. i 1954. godine u kojoj je data eksplicitna forma opšteg rešenja proizvoljne parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

Neposredno nakon pojave Švarcove teorije distribucija pojavile su se i druge teorije koje su se bazirale na različitim definicijama koncepta distribucije. Takve su teorije Mikusinskog[12] [54], Templa[13][99], Lajthila[14] [49], Silva[15] [87] itd. Kod pristupa Švarca i Soboljeva uopštene funkcije definišu se kao neprekidni linearni funkcionali na nekom prostoru funkcija (test funkcije), dok se u teoriji Mikusinskog one definišu kao klase ekvivalencije nizova neprekidnih funkcija što asocira na definiciju realnih brojeva kao klase ekvivalencije nizova racionalnih brojeva. Za razliku od prvih teorija kod kojih se traži veliko poznavanje teorije vektorsko-topoloških prostora, kod teorije Mikusinskog pristup je mnogo elementarniji i zahteva samo elementarna poznavanja konvergencije nizova neprekidnih funkcija na kompaktnim skupovima. U teoriji Mikusinskog operacije između distribucijama definišu se kao operacije između elementima fundamentalnih nizova.

Prirodno se postavlja pitanje: da li pored diferenciranja, i za ostale operacije koje su definisane kod „običnih"neprekidnih funkcija, kao što su sabiranje

[3] Jacques Salomon Hadamard, francuski matematičar, 1865–1963.
[4] Marcell Riesz, mađarski matematičar, 1886–1969.
[5] Salomon Bochner, mađarski matematičar, 1899–1982.
[6] Hikosaburō Komatsu, japanski matematičar, 1935–.
[7] Jean-Baptiste Joseph Fourier, francuski matematičar, 1886–1969.
[8] Oliver Heaviside, engleski matematičar, fizičar i inžener, 1895–1925.
[9] Paul Adrien Maurice Dirac, švajcarski i engleski fizičar, 1902–1984.
[10] Bernard Malgrange, francuski matematičar, 6 July 1928–.
[11] Leon Ehrenpreis, američki matematičar, 1930–2010.
[12] J. Mikusiński, poljski matematičar, 1913–1987.
[13] Dom George Frederick James Temple, engleski matematičar, 1901–1992.
[14] Sir Michael James Lighthill, engleski matematičar, 1924 – 1998 .
[15] José Sebastião e Silva, portugalski matematičar, 1914 – 1972.

funkcija, množenje funkcije sa skalarom, proizvod dve funkcije, konvolucija i tako dalje, postoje analogne operacije tj. da li je moguće proširiti ove operacije do odgovarajućih operacija u prostoru distribucija? Ispostavilo se da su neke od ovih operacija analogne (kao što su zbir i proizvod sa skalarom), međutim postoje i one koje nije moguće proširiti. Operacije koje se ne mogu preneti sa prostora neprekidnih funkcija na prostor distribucija zovu se neregularne operacije. Kako je pokazao Švarc u [86] proizvod distribucija se ne može definisati u opštem slučaju. Sledeće pitanje koje se postavlja je kada je to proširenje moguće, tj. da li postoje neki karakteristični uslovi kada je proizvod dve distribucije dobro definisan i koje su karakteristike tačaka (ili skupova) gde je to moguće uraditi? Jasno je da problem nastaje u tačkama u kojima se nalaze singulariteti distribucije, tj. one tačke koje nemaju okolinu na kojoj distribucija može da se posmatra kao glatka funkcija. Skup svih ovakvih tačaka čini singularni nosač (sing supp) distribucije. Logičan odgovor je da proizvod dve distribucije postoji ako su njihovi singularni nosači disjunktni skupovi. Sledeći korak je ispitivanje postojanja proizvoda dve distribucije čiji singularni nosači nisu disjunktni skupovi. U tom cilju, za neku tačku $x \in \operatorname{sing\,supp} f$ posmatraju se pravci (frekvencije) Furijeove transformacije $\mathcal{F}(f)$ u kojima $\mathcal{F}(f)$ ne opada dovoljno brzo (takozvani singularni pravci). Ispada da je ova analiza invarijantna i ima lokalan karakter i dobila je ime mikrolokalna analiza. Ponašanje distribucije, u opštem slučaju, nije moguće ispitivati u konkretnoj tački, već moramo posmatrati neku okolinu te tačke. Iz tog razloga se distribucija množi sa nekom funkcijom odsecanja i posmatra se njeno ponašanje samo na nosač proizvoda. Lars Hermander[16], korišćenjem koncepta talasnog fronta pokazao je da proizvod dve distribucije postoji ako su njihovi singularni pravci „dobro"postavljeni, tj. ako nisu suprotni.

Postojanje diskretizacije singularnih pravaca omogućuje veliki napredak u ovom smeru. To je moguće napraviti koristeći različite pristupe. U disertaciji koristimo pristup gde umesto distribucija posmatramo periodične produžetke njihovih lokalizacija kako bi primenili tehniku Furijeovih redova za rešavanje problema. Na ovaj način problem postojanja proizvoda prebacuje se iz prostora distribucija u neki prostor nizova u kome posmatramo ponašanje Furijeovih koeficijenata periodičnih produžetaka posmatranih distribucija. Na taj način, na raspolaganje dobijamo moćni aparat Furijeove analize koga primenjujemo kod rešavanja problema množenja distribucija. U

[16]Lars Valter Hörmander, švedski matematičar, 1931 – 2012.

novoj okolini nestaje problem regularnosti, jer novi funkcionali na $\mathbb{Z}^d$ postaju funkcije koje su definisane na diskretnom skupu, tj. u svakoj njegovoj tački.

Između 1960–1961. Rumije[17] u [74] i Berling[18] u [4] definisali su dva tipa prostora ultradistribucija, koji su bili suštinski veći od prostora distribucija. Kompletna slika ovih prostora i njihova struktura bila je data u popularnim radovima Komatsua [38, 40, 41] posle kojih je proučavanje ultradistribucija dobilo novi snažan impuls za dalji razvoj u različitim pravcima. Teorija ultradistribucija je postala naročito važno sredstvo u mikrolokalnoj analizi.

Doktorska disertacija ima pet glave.

U prvoj glavi disertacije navedeni su osnovni pojmovi i prostori funkcija, distribucija i nizova koji će se koristiti, kao i neka njihova svojstva koje se često koriste.

U drugoj glavi obrađene su teme iz mikrolokalne analize. Navedena je teorema Pejli[19]-Viner[20]-Švarca za distribucije koja se često koristi u disertaciji. Takođe je data Hermanderova definicija skupa talasnog fronta, definicija talasnog fronta u diskretizovanom obliku i dokaz da su ove dve definicije ekvivalentne. Uopštenje rezultata je dato posmatranjem Soboljevskog talasnog fronta.

Treća glava je posvećena sekvencijalnom pristupu teoriji ultradistribucija. Na početku su navedena osnovna svojstva prostora ultradistribucija $\mathscr{D}'^*$ i $\mathscr{S}'^*$ i nakon toga radimo sa Ževrejovim[21] nizovima. Takođe Konstruišemo teoriju analognu sekvencijalnoj teoriji distribucija Mikusinskog sa odgovarajućim prilagođavanjima karakteristikama ultradistribucija. U ovoj glavi tvrđenja su navedena bez dokaza.

U četvrtoj glavi je dat sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija. Uvodimo prostor $\mathscr{U}'^*_{per}$ kao prostor klasa ekvivalencije $s$-$p$-fundamentalnih nizova, dajemo strukture konvergencije takvih prostora, kao i delovanje na odgovarajuće funkcije iz prostora ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija $\mathscr{A}^*_{per}$. U [24] je dat dokaz da su Kete[22]-ešelon prostori nizova $\mathbf{a}^*$ topološki izomorfni sa $\mathscr{A}^*_{per}$. Koristeći ovaj rezultat i odgovarajuće razvoje u Furijeove redove, uspostavljamo sekvencijalni topološki izomorfizam između $\mathscr{U}'^*_{per}$ i $\mathscr{A}'^*_{per}$.

[17] Charles Roumieu, francuski matematičar.

[18] Arne Carl-August Beurling, švedski matematičar, 1905 – 1986.

[19] Raymond Edward Alan Christopher Paley, engleski matematičar, 1907–1933.

[20] Norbert Wiener, američki matematičar, 1894–1964.

[21] Maurice-Joseph Gevrey, francuski matematičar, 1884– 1957.

[22] Gottfried Maria Hugo Kthe, austriski matematičar, 1905–1989.

U petoj glavi je data primena periodičnih ultradistribucija u mikrolokalnoj analizi i karakterizacija talasnog i Soboljevskog talasnog fronta pomoću njihovih periodizacija kao i uslovi za egzistenciju multiplikativnog proizvoda ultradistribucija.

U dodatku, na kraju doktorske disertacije, navedene su najvažnije definicije i teoreme iz funkcionalne analize koje se koriste u postavljanju teorija distribucija i ultradistribucija.

U ovoj doktorskoj disertaciji dati su originalni rezultati koji su sadržani u drugoj, trećoj, četvrtoj i petoj glavi. U drugoj glavi originalni rezultati su teoreme za proizvod distribucija i glavni rezultati - dokaz ekvivalencije između klasične definicije Hermandera i talasnog fronta distribucije preko Furijeovih koeficijenata periodičnih produžetaka neke lokalizacije distribucije koji je sadržan u Teoremi 2.4.1 i karakterizacija Soboljevskog talasnog fronta (Teorema 2.5.2). Ovi rezultati su publikovani u radu [51]. Originalni rezutati navedeni u trećoj glavi publikovani su u [50]. U njima je izložen sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija. Rezultati koji su izloženi u četvrtoj i petoj glavi publikovani su u radovima [52] i [14] i odnose se na novi sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija i na sekvencijalni pristup talasnom frontu ultradistribucija.

Primena rezultata koji su predstavljeni u ovoj doktorskoj disertaciji je mnogostruka. Sekvencijalni pristup u proučavanju teorija ultradistribucija omogućuje jednostavniji pristup u shvatanju koncepta ultradistribucija, dok egzistencija multiplikativnog proizvoda distribucija je suštinski problem u mnogim oblastima savremene fizike koji ima višestruke primene. Neke od njih su navedeni na početku druge glave. Koncept talasnog fronta je nerazdvojivo povezan sa ovim problemom i zato je karakterizacija koja je data u ovoj disertaciji veoma aktuelna.

# Glava 1

# Preliminarni rezultati iz teorije distribucija

## 1.1 Definicije i notacija

U ovom delu navešćemo definicije i oznake koje ćemo koristiti u disertaciji. To su standardizovane oznake za normama, skupovima, prostorima itd. koji se koriste u savremenoj literaturi.

### 1.1.1 Skupovi

Koristićemo sledeće standardne oznake:

- $\mathbb{Z}$ – skup celih brojeva,
- $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{N}_0$ – skup nenegativnih celih brojeva,
- $\mathbb{Z}_+$ – skup pozitivnih celih brojeva,
- $\mathbb{Q}$ – skup racionalnih brojeva,
- $\mathbb{R}$ – polje realnih brojeva,
- $\mathbb{C}$ – polje kompleksnih brojeva.

Sa $\{x : P(X)\}$ označavamo skup elemenata $x$ koji imaju osobinu $P(x)$. Za skup $X \neq \emptyset$ i $d \in \mathbb{Z}_+$, sa $X^d$ označavamo skup podređenih $d$-torki iz $X$,

$$X^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in X \text{ za } i = 1, \dots, d\}.$$

Sa $\Omega$, ako nije drugačije naglašeno, označavamo otvoreni skup u $\mathbb{R}^d$.

Simbol $X^\circ$ za dati skup $X \subset \mathbb{R}^d$ označava unutrašnjost skupa $X$.

Za fiksni otvoreni skup $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oznaka $K \subset\subset \Omega$ znači da je $K$ kompaktan podskup sadržan u $\Omega$.

Simbol $:=$ označava da levu stranu definišemo izrazom na desnoj strani.

### Multi-indeksi i oznake u $\mathbb{R}^d$

Za $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ označavamo:

- *zbir* elemenata $x$ i $\xi$ sa

$$x + \xi = (x_1 + \xi_1, \dots, x_d + \xi_d);$$

- *proizvod* elementa $x$ sa skalarom $\lambda$

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d);$$

- *skalarni proizvod* elemenata $x$ i $\xi$ sa

$$x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \xi_i;$$

- *norma* elementa $x \in \mathbb{R}^d$ sa

$$\|x\| = |x| := (x \cdot x)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2},$$

- simbol

$$\langle x \rangle = (1 + \|x\|^2)^{1/2} = (1 + x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2}. \tag{1.1.1}$$

- *multi-indeks* je svaki elemenat iz $\mathbb{N}_0^d$.

  *Dužina multi-indeksa* je broj

$$|\alpha| = |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d.$$

  Za multi-indekse $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$, koristimo sledeće oznake

$$(\alpha \leq \beta) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, d\})(\alpha_i \leq \beta_i),$$

$$(\alpha < \beta) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, \dots, d\})(\alpha_i < \beta_i),$$
$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_d!.$$

Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $\alpha \leq \beta$, definišemo binomne koeficijente

$$\binom{\beta}{\alpha} := \prod_{i=1}^{d} \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

- Eksponenti u $\mathbb{R}^d$ su dati sa

$$x^\xi := x_1^{\xi_1} \cdots x_d^{\xi_d},$$

ako su svi množitelji (eksponenti) na desnoj strani jednačine dobro definisani. Ako $y \in \mathbb{R}$, onda $y^t := y^{t_1 + \cdots + t_d}$.

- simbol za $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in {\mathbb{N}_0}^d$

$$\widehat{x}^r = (1 + |x_1|)^{r_1} \cdots (1 + |x_d|)^{r_d}, \tag{1.1.2}$$

- Neka je $0 < \eta \leq 1$. Radi konciznosti, često ćemo koristiti oznaku za intervale u $\mathbb{R}^d$

$$I_{\eta,x} := \prod_{j=1}^{d} (x_j - \eta/2, x_j + \eta/2) \tag{1.1.3}$$

i

$$I_\eta := I_{\eta,0}. \tag{1.1.4}$$

- Ako $h \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi$ je funkcija na $\mathbb{R}^d$, definišemo *operator translacije* $\tau_h$ sa

$$\tau_h(\varphi)(x) = (\tau_h \varphi)(x) := \varphi(x - h), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Ako $\varphi$ je funkcija na $\mathbb{R}^d$, definišemo *operator refleksije (simetrije)* u odnosu na koordinatni početak $R$ sa:

$$R(\varphi)(x) = (R\varphi)(x) = \tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, koristićemo sledeću oznaku za parcijalne izvode:

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

### 1.1.2 Osnovni funkcionalni prostori

Uvešćemo neke osnovne prostore u kojima ćemo raditi. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ merljiv otvoreni skup u $\mathbb{R}^d$. Polje nad kojem su definisani prostori je $\Phi \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Za $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^m(\Omega)$ je $\Phi$-vektorski prostor koji sadrži funkcije koje su $m$-puta neprekidno diferencijabilne na $\Omega$.

- $\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)$ je vektorski prostor koji sadrži beskonačno diferencijabilne (glatke) funkcije (funkcije koje se mogu diferencirati proizvoljan broj puta) na $\Omega$. Ako $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ je niz kompaktnih skupova u $\Omega$ za koji $K_i \subset\subset K_{i+1}$ i $\cup_{i\in\mathbb{Z}_+} K_i = \Omega$, tada $\mathscr{E}(\Omega)$ postaje konveksan prostor (razdvojiv i metrizabilan) u odnosu na topologiju opredeljenu seminormama
$$p_{\alpha,n}(f) := \sup_{x\in K_n} |f^{(\alpha)}(x)|, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, n \in \mathbb{Z}_+.$$
Topologija ne zavisi od izbora skupova $K_i$.

- (Švarcov) Prostor brzo opadajućih funkcija na $\mathbb{R}^d$, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ je potprostor od $\mathscr{E}$:
$$\mathscr{S} = \{f \in \mathscr{E} : (\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\forall\beta \in \mathbb{N}_0^d), \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty\}.$$
Topologija na $\mathscr{S}$ je definisana familijom seminormi
$$p_{\alpha,\beta}(f) = \|f\|_{\alpha,\beta} := \sup\{|x^\alpha \partial^\beta f(x)| : x \in \mathbb{R}^d\}.$$
Ekvivalentno, $\varphi \in \mathscr{S}$ ako i samo ako
$$(\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d)(\forall N > 0)(\exists C_{\alpha,N} > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^d)$$
$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \le C_{\alpha,N}\langle x\rangle^{-N}.$$
Možemo ograničiti $N$ da bude iz $\mathbb{Z}_+$.

  Konvergenciju u $\mathscr{S}$ definišemo na sledeći način: za niz elemenata $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ iz $\mathscr{S}$ kažemo da $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ ako $\varphi \in \mathscr{S}$ i $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d)$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta(\varphi_n - \varphi)(x)| = 0.$$

$\mathscr{S}$ je metrizabilan konveksan prostor sa topologijom koja je finija nego one koja je na njemu inducirana kao potprostora od $\mathscr{E}$ u odnosu na topologiju kompaktne konvergencije za sve izvode. $\mathscr{S}$ je kompletan prostor $(F)$-prostor (Frešetov[1] prostor ) i u $\mathscr{S}$ neprekidnost je isto što i sekvencijalna neprekidnost.

- Za $f \in \mathscr{C}(X)$, *nosač* funkcije $f$ je skup

$$\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Nosač je uvek zatvoreni skup. Ako $\operatorname{supp}(f) \subset\subset K \subset\subset \Omega$ tada kažemo da $f$ ima *kompaktni nosač*.

Pustimo da $K \subset\subset \Omega$. Skup glatkih funkcija na kompaktnom skupu $K$, $\mathscr{D}_K$, postaje metrizabilan konveksan prostor u odnosu na topologiju definisanu seminormama

$$p_\alpha(f) = \sup\{|f^{(\alpha)}(x)| : x \in K, \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}.$$

$\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$ je Švarcov prostor funkcija u $\mathscr{E}(\Omega)$ koje su sa kompaktnim nosačima. Neka je $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ niz kompaktnih skupova u $\Omega$ za kojih $K_i \subset\subset K_{i+1}$ i $\cup_{i\in\mathbb{Z}_+} K_i = \Omega$, i neka je $\mathscr{D}_n$ vektorski potprostor prostora $\mathscr{D}$ koji se sastoji od one funkcije sa nosačima sadržanim u $K_n$. Tada je $\mathscr{D}_n$ metrizabilan. Ako uzmemo kao bazu okolina u $\mathscr{D}$ skup svih apsolutno konveksnih absorbirujućih podskupova koji imaju neprazan presek sa svakom od $\mathscr{D}_n$, ovo je nemetrizabilna topologija induktivne granice. U odnosu na topologiju kompaktne konvergencije za sve izvode, $\mathscr{D}$ (isto i $\mathscr{S}$) je gusti u $\mathscr{E}$.

Niz $(\delta_n)$ oblika

$$\delta_n := n^d \varphi(n\cdot), n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.5}$$

za fiksnu $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Radi jednostavnosti uzimamo da $\varphi = 1$ u $B(0, 1/2)$ i $\varphi = 0$ van $B(0, 1)$ ($B(x_0, r)$ označava zatvorenu loptu sa centrom u $x_0$ i radiusom $r$) naziva se *delta niz u* $\mathscr{D}'^*(\mathbb{R}^d)$.

Generalizacija delta-niza je delta mreža. Delta-mreža je mreža test funkcija $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ tako da za $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ važi $\operatorname{supp}(\delta_{\varepsilon_2}) \subset \operatorname{supp}(\delta_{\varepsilon_1})$ i kada $\varepsilon \to 0$, $\operatorname{supp}(\delta_\varepsilon) \to \{0\}$, i $(\forall\varepsilon)$ $\int_{\mathbb{R}^d} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}^d} |\delta_\varepsilon(x)|dx < \infty$. Primer delta-mreže je dat sa $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ za fiksnu $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

[1] Maurice Fréchet, francuski matematičar, 1878 – 1973

- Neka je $1 \leq p < \infty$. $\mathscr{L}^p(\Omega)$ je prostor svih $p$–sumabilnih funkcija na $\Omega$. Neka
$$\|f\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$
$$\mathscr{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ je merljiva i } \|f\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)} < \infty\}.$$
Ovaj prostor je konveksan sa normom $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)}$. Često se koriste oznake $\|f\|_{\mathscr{L}^p}$ ili $\|f\|_p$, za normu $\|f\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)}$ ako izbor skupa $\Omega$ je jasan iz konteksta. Za $p = 1$, $\mathscr{L}^1(\Omega)$ je prostor *apsolutno integrabilnih* funkcija na $\Omega$ sa
$$\|f\|_{\mathscr{L}^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$
Lako se može dokazati da $\mathscr{S}$ je gusti potprostor u $\mathscr{L}^p$ za svaki $p \geqslant 0$.

  Za $p = \infty$ dobijamo prostor esencijalno ograničenih funkcija.
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{m \in \mathbb{R} : \mu(\{z : |f(z)| > m\}) = 0\}$$
t.j. to je najmanji $M$ tako da $|f(x)| \leq M$ za skoro svaki $x \in \Omega$. $f$ je *suštinski ograničena*, ako
$$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty.$$
Za $p = \infty$, $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ ako $f$ je merljiva i suštinski ograničena.

- Lokalne verzije prostora $\mathscr{L}^p(\Omega)$ su prostori
$$\mathscr{L}^p_{loc}(\Omega) = \mathscr{L}^{p,loc}(\Omega) := \{f : (\forall\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)) \quad \varphi f \in \mathscr{L}^p(\Omega)\}.$$
Kažemo da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ u $\mathscr{L}^p_{loc}(\Omega)$, ako $f$ i $f_n$ pripadaju u $\mathscr{L}^p_{loc}(\Omega)$ za svaki $n$, i ako
$$(\forall\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)) \quad \lim_{n\to\infty} \varphi f_n = \varphi f \text{ u } \mathscr{L}^p(\Omega).$$
Ako $\Omega = \mathbb{R}^d$, onda skup nakon simbola koji opisuje prostor se izostavlja (na primer, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{D}$).

- Sa $\xrightarrow{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)}$ i $\xrightarrow{\mathscr{C}(K)}$ uniformnu konvergenciju na $\mathbb{R}^d$ i na $K$ nizova funkcija iz $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{C}(K)$, respektivno; poslednje označava konvergenciju u $\mathscr{C}(K)$ u odnosu na supremum normu $\|\cdot\|_\infty$. Označavamo niz $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ brojeva (funkcija, distribucija, ultradistribucija) kraće sa $(\alpha_n)$ ili $(\alpha_n)_n$ i preslikavanje $F:\Omega\to\mathbb{C}$, $x\mapsto F(x)$ prosto sa $F$ ili $F(x)$. Sa $\|\cdot\|_2$ označavamo normu u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i konvergenciju u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sa $\xrightarrow{2}$.

- Hermitovi polinomi $H_n$ i odgovarajuće Hermitove funkcije $h_n$ definišu se na $\mathbb{R}$ sa

  $$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(e^{-x^2}), \qquad h_n(x) := (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

  za $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}_0$. $d$-dimenzionalne Hermitove funkcije $h_n$ date su sa

  $$h_n(x) := h_{n_1}(x_1)\dots h_{n_d}(x_d), \qquad x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d,\ n\in\mathbb{N}_0^d.$$

  One formiraju ortonormalnu bazu za $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i one su sopstvene funkcije proizvoda $H=\prod_{i=1}^d(-\partial^2/\partial x_i^2+x_i^2)$ jedno-dimenzionalnim Hermitovim harmoniskim oscilatorima, pa prema tome

  $$H^\alpha = \prod_{i=1}^d\left(-\partial^2/\partial x_i^2+x_i^2\right)^{\alpha_i}$$

  i

  $$H^\alpha h_k(x) = (2k+1)^\alpha h_k(x) = \prod_{i=1}^d (2k_i+1)^{\alpha_i} h_k(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\ \ \alpha,k\in\mathbb{N}_0^d.$$

  Možemo primetiti da je $H$ samoadjungiran operator. Za $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, Hermitovi koeficijenti su

  $$c_k = \int_{\mathbb{R}^d} f h_k = (f,h_k)_{\mathscr{L}^2}, \qquad \text{za } k\in\mathbb{N}_0^d.$$

### 1.1.3 Nejednačine

U nastavku teze ćemo koristiti klasične nejednačine koje radi celovitosti izlažemo u ovom delu.

*Košijeva nejednakost.* Za svako $\varepsilon > 0$, ispunjeno je

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Za $\varepsilon = \sqrt{2}^{-1}$ dobijamo klasični oblik Košijeve nejednakosti

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Košijeva nejednakost za funkcije:

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) dx,$$

ili

$$\|fg\|_{\mathscr{L}^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|^2_{\mathscr{L}^2(\Omega)} + \|g\|^2_{\mathscr{L}^2(\Omega)}\right).$$

*Koši -Švarcova nejednakost.* Neka $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tada imamo

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|.$$

*Jangova nejednakost.* Ako $1 < p, q < \infty$ su tako izabrani da važi $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, onda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

za sve $a, b > 0$. Ako $\varepsilon > 0$, onda [77]

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{(\varepsilon p)^{q/p}} \frac{b^q}{q}$$

za sve $a, b > 0$. Od gornjeg sledi da ako $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ i $g \in \mathscr{L}^q(\Omega)$, onda $fg \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ sa

$$|fg\|_{\mathscr{L}^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|^p_{\mathscr{L}^p} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{\mathscr{L}^q}. \tag{1.1.6}$$

Ako $x = \infty$ za neko $x \in \{p, q, r\}$ onda uzimamo da važi $\frac{1}{x} := 0$ i obratno, za $x = 0$, $\frac{1}{x} := \infty$.

*Helderova nejednakost.* Neka $1 \leq p, q \leq \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ i $g \in \mathscr{L}^q(\Omega)$, onda $fg \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ i važi

$$\|fg\|_{\mathscr{L}^1(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p(\Omega)}\|g\|_{\mathscr{L}^q(\Omega)}.$$

*Opšta Helderova nejednakost.* Neka $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ su takvi da je ispunjeno $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$. Ako $f_k \in \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$ za svako $k = 1, \dots, m$, onda proizvod $f_1 \cdots f_m \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ i

$$\|f_1 \cdots f_m\|_{L_1(\Omega)} \leq \prod_{k=1}^{m} \|f_k\|_{\mathscr{L}^{p_k}(\Omega)}.$$

Vrlo su korisne i sledeće nejednačine Pitrea[2] koje koristimo kod težinskih funkcija. Prvi oblik je osnovni dok su ostale forme varijante iste nejednačine.

**Propozicija 1.1.1** (Nejednačina Pitrea-osnovni oblik)**.** *Za svako* $s \in \mathbb{R}$ *i* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, *važi*

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leqslant 2^{|s|} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}. \tag{1.1.7}$$

**Propozicija 1.1.2** (Nejednačine Pitrea)**.** *Za svako* $s \in \mathbb{R}$ *i* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, *važi*

$$(1 + \|\xi + \eta\|)^s \leqslant 2^{|s|} (1 + \|\xi\|)^s (1 + \|\eta\|)^{|s|}.$$

*Takođe*

$$\underline{\xi + \eta}^s \leqslant 2^{|s|} \underline{\xi}^s \underline{\eta}^{|s|}$$

*gde je* $\underline{\xi} := \max\{1, \|\xi\|\}$.

Sledeći rezultat koristićemo kod dokaza ekvivalencije različitih oblika talasnog fronta.

**Definicija 1.1.3.** *Kažemo da su nenegativne realne funkcije* $f$ *i* $g$ *ekvivalentne ako postoje* $C_1, C_2 > 0$ *tako da*

$$C_1 < \frac{f}{g} < C_2.$$

**Lema 1.1.4.** *Za svako* $m \geq 0$ *funkcije:*

(*a*) $1 + \|x\|^{2m}$

(*b*) $(1 + \|x\|^2)^m$

(*c*) $\widehat{x}^{2m}$

*su ekvivalentne.*

[2] Jaak Peetre, estonski i švedski matematičar, 1935–.

### 1.1.4 Konvolucija

Za funkcije $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ definišemo njihovu *konvoluciju* sa

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Za $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, važi $\partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g = f * \partial^\alpha g$. Ako $f, g, h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, onda $f * g = g * f$ i $(f * g) * h = f * (g * h)$. Ako iskoristimo Jangovu nejednakost, dobijamo sledeći koristan rezultat:

**Teorema 1.1.5** ([32, 67, 76])**.** *Neka* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *su takvi da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

*Neka* $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ *i* $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$. *Onda* $f * g \in \mathscr{L}^r(\mathbb{R}^d)$ *i*

$$\|f * g\|_{\mathscr{L}^r} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}.$$

## 1.2 Prostori nizova

U klasičnoj analizi su poznati sledeći prostori nizova.

**Definicija 1.2.1.** *Za* $p \geq 1$ *kaže se da niz* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *pripada u* $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ *ako*

$$\|a\|_{\ell^p(\mathbb{Z}_+)} = (\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

*Sa* $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, $p \in [1, \infty)$, *označavamo prostor generalizovanih nizova*

$$\ell^p(\mathbb{Z}^d) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} : \|a\|_{\ell^p} = (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

*Za* $p = \infty$, *definiše se prostor*

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}^d) = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} : \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n| < \infty\}.$$

Za dva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ definišemo njihovu konvoluciju $c = a * b$ gde članovi niza $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ su definisani sa

$$c_n := \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} a_m b_{n-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} a_{n-m} b_m = \sum_{p+q=n\in\mathbb{Z}^d} a_p b_q. \tag{1.2.1}$$

U produžetku disertacije kada kažemo prostor $\ell^p$ mislićemo na prostor $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$. U navedenim prostorima su ispunjene odgovarajuće nejednačine ranije navedenim.

- *Koši-Švarcova nejednakost.* Neka $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Tada imamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n b_n| \leq \|a\|_{\ell^2} \|b\|_{\ell^2}.$$

- *Diskretna Helderova nejednakost.* Neka $1 \leq p, q \leq \infty$ tako da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $a \in \ell^p(\mathbb{Z}^d), b \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$. Tada

$$\|ab\|_{\ell^1} \leq \|a\|_{\ell^p} \|b\|_{\ell^q}.$$

ili

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n b_n| \leq (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

- *Diskretna Jangova nejednakost.* Neka funkcija $h : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ zadovoljava

$$C_1 := \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |h(m,n)| < \infty, \qquad C_2 := \sup_{m\in\mathbb{Z}^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |h(m,n)| < \infty.$$

Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Za svaki niz $a \in \ell^p$ definišimo $b : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ sa $b(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} h(m,n)a(n)$. Tada ako $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ važi

$$\|b\|_{\ell^p} \leq C_1^{1/p} C_2^{1/q} \|a\|_{\ell^p}.$$

Za sume koristimo sledeću notaciju:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} a_\alpha; \qquad \sum_{0\leq\alpha\leq\beta} a_\alpha := \sum_{\alpha_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\alpha_d=0}^{\beta_d} a_\alpha.$$

Ako je poznato u kom skupu su koeficijeti niza čije članove se sabiraju, onda pišemo samo brojač bez skupa. Na primer, ako znamo da su koeficijenti niza iz $\mathbb{Z}$, onda pišemo

$$\sum_n a_n := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n.$$

## 1.3 Furijeova transformacija

Kako je navedeno u [32], cilj Furijeove analize je razlaganje neke funkcije u obliku neprekidne sume karaktera (karakter je sopstvena funkcija za operatora translacije, t.j. funkcija $f$ na $\mathbb{R}^d$ za koju važi sledeći uslov

$$(\forall y \in \mathbb{R}^d)(\forall x \in \mathbb{R}^d) \quad f(x+y) = c(y)f(x)$$

za neko $c(y)$).

**Definicija 1.3.1.** *[11, 76, 98]* Furijeova transformacija *od* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *je*

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi \mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle} f(x)dx.$$

U ovom slučaju se koriste diferencijalni operatori:

$$D_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_j},\ \text{za } j \in \{1,\dots,d\},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^{|\alpha|}\partial^\alpha.$$

*Primedba* 1.3.2. Furijeovu transformaciju različiti autori definišu na različite načine. Na primer, u [18, 10, 32] ona je definisana sa

$$\mathcal{F}_0(f)(\xi) := \int e^{-\mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle} f(x)dx,$$

dok u [67] sa

$$\mathcal{F}_1(f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{-d/2}} \int e^{-\mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle} f(x)dx,$$

Promene u definiciju Furijeove transformacije dovode samo do promene u konstantama koje se nalaze u formulama. Kod $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{F}_1$ diferencijalni operatori imaju oblik:

$$D_j = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_j},\ \text{za } j \in \{1,\dots,d\},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d} = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha.$$

Lako se može pokazati ([18]) da je Furijeova transformacija

$$\mathcal{F} : \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$$

neprekidan ograničeni linearni operator sa normom 1:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Sledeća teorema je poznata kao Lebegova teorema za dominantnu konvergenciju:

**Teorema 1.3.3.** *Neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *niz merljivih funkcija na* $\Omega$ *takav da* $f_n \to f$ *konvergira po tačkama skoro svuda na* $\Omega$ *kada* $n \to \infty$*. Ako* $g \in \mathscr{L}^1(\Omega)$ *je integrabilna funkcija takva da* $|f_n| \leq g$ *za svako* $n$*, onda je* $f$ *integrabilna i*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Korišćenjem teoreme 1.3.3, dobijamo da ako $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, tada je njena Furijeova transformacija $\mathcal{F}(f)$ neprekidna skoro svuda. Takođe, ako $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, na bazi Riman-Lebegove leme njena Furijeova transformacija $\mathcal{F}(f)$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^d$ i važi

$$\lim_{\xi\to\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \to 0.$$

Tako, Furijeova transformacija povezuje osobinu lokalne regularnosti i svojstva rasta u $\infty$.

Ako je $\mathcal{F}(\varphi)$ integrabilna funkcija, tada važi

$$\varphi(x) = \int e^{2\pi \mathrm{i}\, \langle x,\xi\rangle} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) d\xi$$

(ili ako se koristi alternativna definicija Furijeove transformacije, tada

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{\mathrm{i}\, \langle x,\xi\rangle} \mathcal{F}_0(\varphi)(\xi) d\xi = \int e^{\mathrm{i}\, \langle x,\xi\rangle} \mathcal{F}_0(\varphi)(\xi) dj\xi,$$

gde je $dj\xi = (2\pi)^{-d} d\xi$, ili

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int e^{\mathrm{i}\, \langle x,\xi\rangle} \mathcal{F}_1(\varphi)(\xi) d\xi.)$$

Ova formula je definicija *inverzne Furijeove transformacije* koju kraće označavamo sa

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi} = \check{\hat{\varphi}} = \varphi.$$

Furijeovu transformaciju je vrlo zgodno koristiti na prostoru $\mathscr{S}$ zbog sledeću osobinu:

**Teorema 1.3.4.** *Furijeova transformacija je izomorfizam od $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ u $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, t.j. za $\varphi \in \mathscr{S}$, važi*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \varphi \quad (\textit{respektivno } \mathcal{F}_0(\mathcal{F}_0(\varphi)) = (2\pi)^d R(\varphi)).$$

Prostor $\mathscr{S}$ ima sledeća korisna svojstva povezana sa Furijeovom transformacijom:

**Lema 1.3.5.** *[16, 28, 32, 67, 76, 98] Sledeće relacije su zadovoljene za sve $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$:*

1. $\mathcal{F}(\tau_h\varphi)(\xi) = e^{-2\pi \mathrm{i}\, \langle \xi, h\rangle}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ *ili* $\widehat{\tau_h\varphi}(\xi) = e^{-2\pi \mathrm{i}\, \langle \xi, h\rangle}\hat{\varphi}(\xi)$
   *(Alternativno,* $\mathcal{F}_0(\tau_h\varphi)(\xi) = e^{-\mathrm{i}\, \langle \xi, h\rangle}\mathcal{F}_0(\varphi)(\xi)$*)*
2. $\tau_\eta(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}(e^{2\pi \mathrm{i}\, \langle \eta, \xi\rangle}\varphi(\xi))$
3. $\mathcal{F}(D_j\varphi) = 2\pi\mathrm{i}\; \xi_j\mathcal{F}(\varphi)$ *ili* $\widehat{D_j\varphi} = 2\pi\mathrm{i}\; \xi_j\hat{\varphi}$
   *(Alternativno,* $\mathcal{F}_0(D_j\varphi) = \xi_j\mathcal{F}_0(\varphi)$*)*
4. $D_j\mathcal{F}(\varphi) = -(2\pi\mathrm{i})\mathcal{F}(x_j\varphi)$ *ili* $D_j\hat{\varphi}(\xi) = -(2\pi\mathrm{i})\widehat{x_j\varphi}(\xi)$
   *(Alternativno,* $\mathcal{F}_0(x_j\varphi) = (-1)D_j\mathcal{F}_0(\varphi)$*)*
5. $\int \mathcal{F}(\varphi)\psi dx = \int \varphi\mathcal{F}(\psi)dx$ *ili* $\int \hat{\varphi}\psi dx = \int \varphi\hat{\psi}dx$
6. $\int \varphi\bar{\psi}dx = \int \mathcal{F}(\varphi)\overline{\mathcal{F}(\psi)}dx$ *ili* $\int \varphi\bar{\psi}dx = \int \hat{\varphi}\bar{\hat{\psi}}dx$ *(Parsevalova formula)*
   *(Alternativno,* $\int \varphi\bar{\psi}dx = (2\pi)^{-d}\int \mathcal{F}_0(\varphi)\overline{\mathcal{F}_0(\psi)}dx$*)*
7. $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)$ *ili* $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$
   *(ali* $\mathcal{F}_1(\varphi * \psi) = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}_1(\varphi)\mathcal{F}_1(\psi)$ *što je glavni problem kod* $\mathcal{F}_1$*!)*
8. $\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi)$ *ili* $\widehat{\varphi\psi} = \hat{\varphi} * \hat{\psi}$
   *(Alternativno,* $\mathcal{F}_0(\varphi\psi) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}_0(\varphi) * \mathcal{F}_0(\psi)$*)*

Svojstva Furijeove transformacije koje ćemo najčešće koristiti su 7 i 8, t.j. veze između konvolucionog i multiplikativnog proizvoda.

## 1.4 Prostori distribucija

### 1.4.1 Prostor temperiranih distribucija $\mathscr{S}'$

Ako je $X(\mathbb{C})$ vektorski prostor nad polju kompleksnih brojeva tada prostor $X' = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ je linearno i neprekidno}\}$ je dualni prostor prostora $X$. Dejstvo funkcionala $f$ nad $x \in X$ označavamo sa $f(x)$ ili $\langle f, x\rangle$, a u [43] koristi se oznaka $\langle x, f\rangle$. Od sada smatramo da $\langle f, x\rangle = \langle x, f\rangle$.

**Definicija 1.4.1.** *$f \in \mathscr{S}'$ je neprekidan, ako za neki niz $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ iz $\mathscr{S}$ kada $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathscr{S}$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi)$ u $\mathbb{C}$, t.j. $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ u $\mathbb{C}$.*

*Ekvivalentno, [18]: $f \in \mathscr{S}'$ je neprekidan ako i samo ako, postoji konstanta $C > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ tako da*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \text{ za svaku } \varphi \in \mathscr{S}.$$

**Definicija 1.4.2.** *Prostor temperiranih distribucija $\mathscr{S}'$ je prostor koji se sastoji od svih neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathscr{S}$ (ili dualni prostor prostora $\mathscr{S}$).*

Strukturna teorema za temperirane distribucije može da se nađe u [2, 18]. Kažemo da je $\varphi$ neprekidna funkcija polinomnog rasta ako postoje konstante $C > 0, M > 0$ za koje važi

$$(\forall x \in \mathbb{R}^d) \quad |\varphi(x)| \leq C\langle x\rangle^M.$$

**Propozicija 1.4.3.** *[2, 18] Svaka temperirana distribucija je konačan izvod neke neprekidne funkcije polinomnog rasta.*

Furijeova transformacija za temperirane distribucije definiše se na sledeći način.

**Definicija 1.4.4.** *Ako $f \in \mathscr{S}'$, tada Furijeova transformacija od $f$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, je definisana sa*

$$\left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle := \left\langle f, \hat{\phi} \right\rangle, \text{ za svako } \varphi \in \mathscr{S}.$$

**Propozicija 1.4.5** ([76])**.** *Neka je $X$ topološki potprostor iz $\mathscr{S}'$ (t.j., konvergencija u $X$ povlači konvergenciju u $\mathscr{S}'$). Ako $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ u $\mathscr{S}'$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = v$ u $X$, onda $f \in X$ i $f = v$.*

**Propozicija 1.4.6** ([76]). *(Princip jedinstvenosti za distribucije). Neka $u, v \in \mathscr{S}'$ i neka $\langle u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle$ za svako $\varphi \in \mathscr{S}$. Tada $u = v$.*

**Propozicija 1.4.7** (Hausdorf-Jangova nejednakost). *Neka $1 \leq p \leq 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako $u \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ tada $\hat{u} \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)$ i*

$$\|\hat{u}\|_{\mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)}.$$

**Propozicija 1.4.8** ([16]). *Za svaki $q \in [1, \infty]$, važi $\mathscr{S}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{L}^q(\Omega)$ (inkluzija je neprekidna, t.j. ako $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathscr{S}$, tada $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathscr{L}^q(\Omega)$).*

Za dualne prostore, ispunjena je sledeća

**Propozicija 1.4.9** ([16]). *Za svako $p \in [1, \infty]$, važi $\mathscr{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\Omega)$.*

### 1.4.2 Operacije u prostoru temperiranih distribucija

**Definicija 1.4.10.** *Za $f \in \mathscr{S}', \alpha \in \mathbb{N}_0^d$, definišemo $\alpha$*-ti izvod od $f$ (u distribucionom smislu) *sa*

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle f, \partial^\alpha \varphi\rangle,$$

*gde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$.*

**Propozicija 1.4.11.** *[76] Ako $f \in \mathscr{S}', \alpha \in \mathbb{N}_0^d$, tada $\partial^\alpha f \in \mathscr{S}'$ i operator $\partial^\alpha : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ je neprekidan.*

*Proizvod glatke funkcije $\psi \in \mathscr{E}$ i temperirane distribucije $f \in \mathscr{S}'$* je

$$\langle \psi f, \varphi\rangle := \langle f, \psi\varphi\rangle$$

(ili $(\psi f)(\varphi) = f(\psi\varphi)$).

**Definicija 1.4.12.** Inverzna Furijeova transformacija *od $f \in \mathscr{S}'$ je unarna operacija na $\mathscr{S}'$ definisana sa*

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1} f, \varphi\right\rangle := \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle, \text{ za svako } \varphi \in \mathscr{S},$$

*(ili drugačije zapisano, $(\mathcal{F}^{-1} f)(\varphi) := f(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$)*

Definicija je dobra jer $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ je dobro definisana za sve $\varphi \in \mathscr{S}$.

**Propozicija 1.4.13.** *Inverzna Furijeova transformacija*

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$$

*je neprekidna operacija na* $\mathscr{S}'$.

**Propozicija 1.4.14.** *[76] Operatori* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{F}^{-1}$ *su inverzni jedan drugome na* $\mathscr{S}'$, *i*

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = id_{\mathscr{S}'}.$$

### 1.4.3 Prostori distribucija $\mathscr{D}'$

Za otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ označavamo prostor regularnih funkcija sa kompaktnim nosačem sa $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) = \mathscr{D}(\Omega)$.

**Definicija 1.4.15.** *Kažemo da* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ *u* $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ *ako:* $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, *postoji kompaktan skup* $K \subset\subset \Omega$ *takav da za svako* $n \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K, \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ *i* $\sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)| \to 0$ *za sve multi-indekse* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Tada se $\mathscr{D}'(\Omega)$ definiše kao skup svih linearno neprekidnih funkcionala na $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ i naziva se *prostor distribucija (Švarcovih distribucija).*

**Teorema 1.4.16.** *[67, 76] Linearan operator* $f : \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *pripada u* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *ako i samo ako za svaki* $K \subset\subset \Omega$ *postoje konstante* $C$ *i* $m$ *takve da*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \tag{1.4.1}$$

*za sve* $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ *sa* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$.

Najmanji prirodni broj $m$ za koji je jednakost (1.4.1) ispunjena zove se *red distribucije* $f$ *na kompaktnom skupu* $K$. Ako postoji $m$ takav da je (1.4.1) ispunjena za svih kompaktnih podskupova od $\Omega$, i pritom to je najmanji nenegativan celi broj sa tom osobinom, on se zove *red distribucije* $f$.

**Teorema 1.4.17.** *[16, 67, 76] Važi*

$$\mathscr{D} \hookrightarrow \mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{L}^p \hookrightarrow \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{D}',$$

*za svaki* $p \in [1,\infty]$. *Za* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *imamo* $\mathscr{L}^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$, *za svaki* $p \in [1,\infty]$.

### 1.4.4 Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathscr{E}'(\Omega)$

Kažemo da $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ u $\mathscr{E}(\Omega)$ ako $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$ i ako

$$\sup_{x\in K} \lim_{n\to\infty} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)| = 0$$

za svakog multi-indeksa $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ i za svakog kompaktnog podskupa $K \subset\subset \Omega$.

**Definicija 1.4.18.** *Prostor distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathscr{E}'(\Omega)$ je skup svih linearnih neprekidnih funkcionala $f : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$.*

Lako se vidi da

$$\mathscr{E}' \hookrightarrow \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{D}'$$

i za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ važi $\mathscr{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$;

Za $f \in \mathscr{D}'$ kažemo da $f \equiv 0$ na $\Omega$ ako $\langle f, \varphi\rangle = 0$ za svako $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Nosač distribucije* $f$ se ne može definisati na isti način kao nosač funkcije. To je zato što distribucija se ne može definisati u svakoj tački nekog skupa.

**Definicija 1.4.19.** *Nosač distribucije $f$ je komplement skupa tačaka $x \in \mathbb{R}^d$ za koje $f \equiv 0$ u nekoj okolini tačke $x$. Preciznije, kaže se da $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je različita od nule na skupu $K \subseteq \Omega$ ako $\langle f, \varphi\rangle = 0$ za sve $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$, za koje* $\operatorname{supp}(\varphi) \cap K = \emptyset$. Nosač $f$ *je najmanji zatvoreni skup na kome je $f$ različita od nule i označava se sa* $\operatorname{supp}(f)$.

**Propozicija 1.4.20.** *[67, 76] Ako nosač $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ je kompaktan, tada je $f$ konačnog reda. Skup svih distribucija sa kompaktnim nosačem je $\mathscr{E}'(\Omega)$.*

**Definicija 1.4.21.** *Distribucija $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je* regularna u tački $x \in \Omega$ *ako postoji otvorena okolina $U \ni x$ i regularna funkcija $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(U)$, tako da*

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x)\varphi(x)dx = \langle \alpha, \varphi\rangle$$

*za svako $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$.*

**Definicija 1.4.22. Singularni nosač** *distribucije $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se definiše kao komplement skupa na kome je $f$ regularna: $x \notin \operatorname{sing\,supp} f$ ako postoji otvorena okolina $U$ tačke $x$ i regularna funkcija $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(U)$ takva da*

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle \alpha, \varphi\rangle$$

*za svaku $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(U)$.*

Jasno je iz definicije da ako $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tada je $\operatorname{sing\,supp}(f)$ zatvoreni skup.

## 1.5 Sekvencijalni pristup teoriji distribucija

Između različitih načina da se definišu distribucije možda najjednostavniji i najpristupačniji je takozvani *sekvencijalni pristup* uveden od strane poljskog matematičara Mikusinskog u [54], a koji je detaljno izložen u [2]. Ovaj pristup bazira se na kompletiranje prostora neprekidnih funkcija klasama ekvivalencije fundamentalnih nizova koji se nazivaju distribucije (ili distribucije Mikusinskog). Tako dobiveni prostor je zatvoren u odnosu na operaciju diferenciranja. Ovaj postupak je analogan postupku kompletiranja racionalnih brojeva sa realnim brojevima.

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni (ograničeni ili neograničeni) interval.

**Definicija 1.5.1.** *[2] Kaže se da je niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ iz $\mathscr{C}(I)$* fundamentalan *ako i samo ako*

*(1) postoje nenegativan celi broj $p \in \mathbb{N}_0$ i niz $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ u $\mathscr{C}^p(I)$ takvi da*

$$F_n^{(p)}(x) = f_n(x) \text{ za svako } x \in I, \text{ i za svaki } n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.5.1}$$

*(2) niz $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergira ravnomerno na svakom $K \subset\subset I$.*

Uslov (2) se još naziva *skoro ravnomerna* konvergencija na otvorenom skupu $I \subset \mathbb{R}$. U [2] označava se sa $F_n \rightrightarrows$ dok mi ćemo koristiti i oznaku $F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}$.

**Definicija 1.5.2.** *Dva fundamentalna niza $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ su* ekvivalentna *i pišemo $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}\sim(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ , ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}_0$ i nizovi $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ iz $\mathscr{C}(I)$ za kojih*

*(1) $F_n^{(p)} = f_n$, $G_n^{(p)} = g_n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$,*

*(2) oba niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergiraju skoro ravnomerno prema istoj granici $F$. Ovo se u [2] označava sa $F_n \rightrightarrows\leftleftarrows G_n$ dok mi ćemo koristiti i izraz*

$$F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}\xleftarrow{\mathscr{C}(K)} G_n, \ n \to \infty.$$

**Teorema 1.5.3.** *[2] Relacija $\sim$ je ekvivalencija.*

**Teorema 1.5.4.** *[2] Dva fundamentalna niza $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ su ekvivalentna, ako i samo ako niz:*

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$$

*je fundamentalan.*

**Definicija 1.5.5.** Distribucija (u smislu Mikusinskog) *je klasa ekvivalencije $[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = [(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}]/\sim$ fundamentalnih nizova u odnosu na relaciju ekvivalencije $\sim$ definisanu u 1.5.2.*

Ako posmatramo konstantni niz $f_n(x) = f(x)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$, očigledno je da je to jedan fundamentalan niz. Svakom elementu $f \in \mathscr{C}(I)$ moguće je pridružiti klasu ekvivalencije konstantnog niza $[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}]$ i na taj način dobija se inkluzija prostora $\mathscr{C}(I)$ u prostor distribucija Mikusinskog.

Neka je $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ rastući niz kompaktnih podskupova od $I$ tako da $I = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} K_n$. Na bazi teoreme Vajerštrasa za aproksimaciju neprekidnih funkcija sledi da za svaku funkciju $f \in \mathscr{C}(I)$ postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ za koji

$$\sup_{x\in K_n} |f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dobija se da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f \in \mathscr{C}(I)$ postoji niz polinoma $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ koji konvergira skoro ravnomerno prema $f$ i svaka distribucija Mikusinskog je predstavljena kao klasa ekvivalencije $[(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}]$.

Definišemo distribucioni diferencijalni operator $D$ sa

$$D[(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = [(P'_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}].$$

Lako je dokazati da u odnosu na ovaj operator svaka distribucija Mikusinskog je beskonačno puta diferencijabilna.

Broj $p$ u uslovu (1.5.1) može da bude isti za svaki skup $K_n$. Najmanji od ovih brojeva, ako takav postoji, kaže se da je *red distribucije* definisanoj klasom ekvivalencije $[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}]$ i da je ta distribucija konačnog reda. Ukoliko takav nenegativan ceo broj ne postoji, kaže se da je red distribucije beskonačan.

Definicije se mogu formulisati i na sledeći način koji je praktičniji. Kažemo da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $f_n \in \mathscr{C}(I)$, fundamentalan ako i samo ako za svaki $K \subset\subset I$ postoji $p = p(K) \in \mathbb{N}_0$ i niz $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ u $\mathscr{C}^p(I)$, tako da $F_n^{(p)} = f_n$ na $K$ za svaki $n \in \mathbb{Z}_+$ i $F_n \rightrightarrows$ na $K$. Dva ovakva fundamentalna niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i

$(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ su ekvivalentna ako za svaki $K \subset\subset I$ postoji neko $p = p(K) \in \mathbb{N}_0$ i nizovi $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, tako da $F_n^{(p)} = f_n, G_n^{(p)} = g_n$ nad $K$ i oba niza $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ konvergiraju ravnomerno ka istoj granici na $K$

$$F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}\xleftarrow{\mathscr{C}(K)} G_n, n \to \infty.$$

Distribucija u opštem slučaju je tada definisana kao klasa ekvivalencije fundamentalnih nizova.

U definiciji distribucija Mikusinskog na nekom otvorenom podskupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, umesto fundamentalnih nizova neprekidnih funkcija koji se koriste u slučaju $d = 1$, teorija se zasniva na fundamentalnih nizova beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija.

Razgledajmo linearni prostor $\mathscr{C}^\infty(I)$ svih beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija definisanim na nekom otvorenom (moguće i beskonačnom) intervalu $I \subset \mathbb{R}^d$.

**Definicija 1.5.6.** *Kaže se da je niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *iz* $\mathscr{C}^\infty(I)$ fundamentalan *ako i samo ako*

*(1)* $(\exists p \in \mathbb{N}_0)(\exists (F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}, F_n \in \mathscr{C}^\infty(I))(\forall n \in \mathbb{Z}_+) \quad F_n^{(p)} = f_n$ *nad* $I$,

*(2)* $(\forall K \subset\subset I) \quad F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}$, $n \to \infty$.

**Definicija 1.5.7.** *Dva fundamentalna niza* $(f_n)_{n\in n\in\mathbb{Z}_+}$, $(g_n)_{n\in n\in\mathbb{Z}_+}$ *kaže se da su ekvivalentni i pišemo* $(f_n)_{n\in n\in\mathbb{Z}_+}\sim(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, *ako i samo ako postoji* $p \in \mathbb{N}_0$ *i nizovi* $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *tako da*

*(1)* $F_n^{(p)}(x) = f_n(x)$, $G_n^{(p)}(x) = g_n(x)$ *za svako* $x \in I$ *i za svako* $n \in \mathbb{Z}_+$,

*(2) oba niza* $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *i* $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *konvergiraju skoro ravnomerno prema istoj granici* $F$. *Ovo se označava sa* $F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}\xleftarrow{\mathscr{C}(K)} G_n$, $n \to \infty$.

**Definicija 1.5.8.** *Distribucija u smislu Mikusinskog je definisana kao klasa ekvivalencije* $[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}/\sim$ *fundamentalnih nizova u odnosu na relaciju ekvivalencije* $\sim$ *iz Definicije 1.5.7.*

Operacije kod distribucija se uvode kao operacije nad elementima klasa ekvivalencije. Neka su $f = [(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}], g = [(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}]$ distribucije Mikusinskog, $\lambda \in \mathbb{C}$ je skalar i $\omega \in \mathscr{C}_0^\infty$ je neka fiksna glatka funkcija nad $\mathbb{R}^d$. Sledeće operacije su dobro definisane, t.j. svi nizovi koji se nalaze na desnoj strani su fundamentalni.

- Proizvod skalara $\lambda$ i distribucije $f$

$$\lambda f = \lambda[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = [(\lambda f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}].$$

- Zbir distribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ ima sledeća svojstva:

$$f + g = [(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] + [(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = [(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}].$$

- Proizvod glatke funkcije $\omega$ i distribucije $f$

$$\omega f = \omega[(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}] = [(\omega f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}].$$

Međutim problem se javlja ako pomnožimo članove dva niza. Imeno, ako su nizovi $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ fundamentalni, proizvod-niz

$$(f_n g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

u opštem slučaju ne mora da bude fundamentalan! Prema tome proizvod distribucija nije definisan u opštem slučaju. Primer gde proizvod nije definisan je dat u [2] 12.5, str.275.

## 1.6 Prostori Soboljeva, $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$

Prostori $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ su za prvi put definisani od Soboljeva sredinom 30-tih godina prošlog stoljeća [90] i nose njegovo ime. On ih je koristio za rešavanje PDJ pre svega iz oblasti fizike i kvantne mehanike. Ideja je bila da se iskoriste funkcije iz $\mathscr{L}^p(\Omega)$, gde je $\Omega$ otvoreni skup u $\mathbb{R}^d$, za kojih se zna da svi njihovi parcijalni izvodi do nekog reda su iz $\mathscr{L}^p(\Omega)$, za dobijanje konvencionalna rešenja postavljenim PDJ. Jednačinu rešavamo u prostoru distribucija, a nakon toga proveravamo da li ta rešenja imaju neka dobra svojstva. Teorija Soboljevskih prostora je vrlo primenjivana i razrađena u mnogim tekstovima, kao na primer [1, 53, 67, 98] itd.

**Definicija 1.6.1.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup i $u, v \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Kažemo da je $v$ $\alpha$-ti slabi parcijalni izvod od $u$ ako za svako $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ važi*

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi dx.$$

*Koristi se oznaka $v = \partial^\alpha u$.*

**Definicija 1.6.2.** *Neka je $1 \leqslant p \leqslant \infty$ i $m \in \mathbb{Z}_+$. Prostor Soboljeva $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ je podskup prostora Švarcovih distribucija $\mathscr{D}'$ za čije elemente važi:*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(|\alpha| \leqslant m) \qquad \partial^\alpha u \in \mathscr{L}^p(\Omega),$$

*gde je $\partial^\alpha u$ $\alpha$-ti slabi izvod distribucije $f$).*

Takođe se koriste i oznake $W_p^m(\Omega), \mathscr{L}_m^p(\Omega)$. Jasno je iz definicije da

$$\mathscr{H}^{p,0}(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega), \qquad \mathscr{H}^{p,m}(\Omega) \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega) \subseteq \mathscr{S}', \text{ za } m \geqslant 1. \tag{1.6.1}$$

**Propozicija 1.6.3.** *Neka je $1 \leqslant p < \infty$ i $m \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ je normiran prostor sa normom*

$$||u||_{p,m,\Omega} := \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} ||\partial^\alpha u||^p_{\mathscr{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6.2}$$

*Za $p = \infty$,*

$$||u||_{\infty,m,\Omega} := \max_{|\alpha| \leqslant m} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |\partial^\alpha u|.$$

U produžetku, kada kažemo prostor $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ mislimo na normiranom prosotru sa normom (1.6.2).

**Teorema 1.6.4.** *[67] Neka je $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ je Banahov prostor. Prostor $\mathscr{H}^{2,m}(\Omega)$ je Hilbertov.*

Za $\mathscr{H}^{2,m}(\Omega)$ koristi se oznaka $\mathscr{H}^m(\Omega)$.

**Teorema 1.6.5.** *[67] Prostor $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$, za $1 \leqslant p < \infty$ je separabilan, a za $1 \leqslant p < \infty$ je refleksivan.*

**Teorema 1.6.6.** *[67] Neka je $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Identičko preslikavanje iz $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ u $\mathscr{D}'(\Omega)$ je neprekidno u odnosu na jaku topologiju u $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

**Teorema 1.6.7.** *[67] Neka je $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$.*

*(i) Ako $\varphi \in \mathscr{C}^m(\Omega)$ i ako su svi izvodi do reda $m$ funkcije $\varphi$ ograničeni, tada je preslikavanje $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega) \ni f \mapsto \varphi f \in \mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ linearno i neprekidno.*

*(ii) Za $|\alpha| \leqslant m$ preslikavanje*

$$\partial^\alpha : \mathscr{H}^{p,m}(\Omega) \to \mathscr{H}^{p,m-|\alpha|}(\Omega), \qquad f \mapsto \partial^\alpha f$$

*je linearno i neprekidno.*

Slično kao kod distribucija, postoje lokalne verzije Soboljevskih prostora.

**Definicija 1.6.8.** *Kažemo da je*

$$u \in \mathscr{H}_0^{m,p}(\Omega) = \mathscr{L}_m^{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$$

*ako za svako $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, važi $\varphi u \in \mathscr{H}^{m,p}(\Omega) = \mathscr{L}_m^p(\Omega)$.*

**Definicija 1.6.9.** *Kažemo da $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ u $\mathscr{H}_0^{m,p}$, ako za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ je $u_n \in \mathscr{H}_0^{m,p}(\Omega)$, $u \in \mathscr{H}_0^{m,p}(\Omega)$ i za svaku $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi u_n = \varphi u \text{ u } \mathscr{H}^{m,p}.$$

**Teorema 1.6.10.** *[67] Neka je $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$.*
*Prostor $\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega)$ je Banahov, dok $\mathscr{H}^{2,m}(\Omega)$ je Hilbertov prostor.*

**Teorema 1.6.11.** *[67] Neka je $1 \leqslant p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$.*
*Prostor $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap \mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$ je gusti u $\mathscr{H}^{p,m}(\Omega)$.*

**Teorema 1.6.12.** *[67] Neka je $1 \leqslant p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$.*
*Prostor $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ je gusti u $\mathscr{H}^{p,m}(\mathbb{R}^d)$.*

**Posledica 1.6.13.** *[67] Ako je $1 \leqslant p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, tada je*

$$\mathscr{H}^{p,m}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{H}_0^{p,m}(\mathbb{R}^d).$$

Sada ćemo navesti neke teoreme koje se odnose na dualni prostor $(\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega))'$. Direktno iz definicije sledi da je on potprostor prostora $\mathscr{D}'(\Omega)$ u smislu identifikacije neprekidnih linearnih funkcionala nad gustom prostoru $\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega)$ i neprekidnih linearnih funkcionala nad gustim potprostorom $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ prostora $\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega)$ .

**Teorema 1.6.14.** *[67] Distribucija $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je neprekidan linearni funkcional nad $\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ako i samo ako $f$ ima oblik*

$$f = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha, \tag{1.6.3}$$

*gde je izvod u distribucionom smislu, $f_\alpha \in \mathscr{L}^q(\Omega)$ i $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ za $p \neq 1$, a za $p = 1$, $q = \infty$.*

**Definicija 1.6.15.** *$\mathscr{H}^{p,-m}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \geqslant 1$, je potprostor prostora $\mathscr{D}'(\Omega)$ čiji su elementi distribucije oblika*

$$f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_\alpha^{(\alpha)}, \tag{1.6.4}$$

*gde su $f_\alpha \in \mathscr{L}^p(\Omega)$.*

*U prostoru $\mathscr{H}^{p,-m}$ je definisana norma sa*

$$||f||_{p,-m,\Omega} := \inf \left\{ \left( \sum_{|\alpha| \leqslant m} ||f_\alpha||^p_{\mathscr{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \tag{1.6.5}$$

*gde se infimum uzima po svim reprezentacijama distribucije $f$ oblika* (1.6.4).

**Teorema 1.6.16.** *[67] Prostor neprekidnih linearnih funkcionala nad $\mathscr{H}_0^{p,m}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ sa dualnom normom*

$$||f||'_{p,m,\Omega} = ||f||_{q,-m,\Omega} \tag{1.6.6}$$

*je izometričan sa $H^{q,-m}(\Omega)$ i normom* (1.6.5) *(gde $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ za $p \neq 1$, $q = \infty$ za $p = 1$).*

**Teorema 1.6.17.** *[67] Ako $f \in \mathscr{H}^{p,-m}$ i $g \in \mathscr{H}^{q,-s}$, gde je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1; p, q \in [1, \infty]$, tada konvolucija $f * g$ postoji i pripada prostoru $\mathscr{H}^{r,-m-s}$ gde je*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Naročito su interesantni prostori $\mathscr{H}^m = \mathscr{H}^{2,m}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{H}_0^m = \mathscr{H}_0^{2,m}(\mathbb{R}^d)$ jer su Hilbertovi prostori i na njih možemo da koristimo dobra svojstva Hilbertovih prostora.

**Teorema 1.6.18.** *[67] Neka je $\Omega$ otvoreni skup u $\mathbb{R}^d$. Prostori $\mathscr{H}_0^m(\Omega)$ i $\mathscr{H}^{-m}(\Omega)$, za $m \in \mathbb{N}$ su izometrični. Izometrija tih prostora definisana je relacijom*

$$\mathscr{H}_0^m(\Omega) \ni f \mapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \partial^{2\alpha} f \in \mathscr{H}^{-m}(\Omega). \tag{1.6.7}$$

**Posledica 1.6.19.** *[67] Prostor $\mathscr{H}^{-m}(\Omega), m \in \mathbb{N}$, je Hilbertov.*

Prostore $\mathscr{H}^m$ i $\mathscr{H}^{-m}$ možemo okarakterisati pomoću Furijeove transformacije.

**Teorema 1.6.20.** *[67]*

*(i) Distribucija $f$ pripada u $\mathscr{H}^m, m \in \mathbb{N}$ ako i samo ako $f \in \mathscr{S}'$ i važi $\hat{f}\langle|\xi|\rangle^m \in \mathscr{L}^2$.*

*(ii) Distribucija $f$ pripada u $\mathscr{H}^{-m}, m \in \mathbb{N}$ ako i samo ako $f \in \mathscr{S}'$ i važi $\hat{f}\langle|\xi|\rangle^{-m} \in \mathscr{L}^2$.*

Na bazi gornje teoreme, definišu se Soboljevski prostori $\mathscr{H}^m$ za svaki $m \in \mathbb{R}$ koji se takođe nazivaju i Beselovi potencijalni prostori (F. Bessel).

**Definicija 1.6.21.** *[67, 98] Za proizvoljno $m \in \mathbb{R}$ sa $\mathscr{H}^m$ označavamo prostor temperiranih distribucija za koje važi*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^m|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

*t.j. $f \in \mathscr{H}^m \Leftrightarrow \hat{f}\langle\xi\rangle^m \in \mathscr{L}^2$.*

**Teorema 1.6.22.** *[67] Prostor $\mathscr{H}^m, m \in \mathbb{R}$ izomorfan je sa $\mathscr{L}^2$. Ispunjeno je i*

$$\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{H}^m. \tag{1.6.8}$$

**Teorema 1.6.23.** *[67] Ako je $f \in \mathscr{H}^m, m \in \mathbb{R}$ tada važi*

*(i) $\frac{\partial}{\partial x_i} f \in \mathscr{H}^{m-1}, i = 1, \ldots, d$.*

*(ii) Ako je $\varphi \in \mathscr{S}$, tada je preslikavanje*

$$\mathscr{H}^m \ni f \mapsto \varphi f \in \mathscr{H}^m$$

*neprekidno.*

*(iii) Ako je $f \in \mathscr{H}^{m_1} \cap \mathscr{E}', g \in \mathscr{H}^m \cap \mathscr{S}'$, tada je $f * g \in \mathscr{H}^{m+m_1}$.*

**Teorema 1.6.24.** *[67] Dual prostora $\mathscr{H}^m, m \in \mathbb{R}$ je $\mathscr{H}^{-m}$.*

**Teorema 1.6.25.** *[76, 67] Ispunjene su sledeće jednačine*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \cap_{s\in\mathbb{R}}\langle x\rangle^{-s}\mathscr{H}^s, \qquad \cap_{s\in\mathbb{R}}\mathscr{H}^s \subseteq \mathscr{E} \tag{1.6.9}$$

*i*

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) = \cup_{s\in\mathbb{R}}\langle x\rangle^{s}\mathscr{H}^s, \qquad \mathscr{E}' \subseteq \cup_{s\in\mathbb{R}}\mathscr{H}^s \tag{1.6.10}$$

## 1.7 Periodične distribucije

Prostor periodičnih distribucija je jedan od osnovnih Švarcovih prostora i on je izučavan u mnogim knjigama i radovima tokom druge polovine prošlog stoljeća. Neke važnije od njih su [3, 82, 83, 2, 100, 88, 36]. Motivacija za izučavanje ovih distribucija je lokalna analiza i mikroanaliza neke funkcije ili distribucije. Na taj način mnogi problemi i računi koji se izvode u $\mathbb{R}^d$ se uproštavaju i prebacuju se na torusu $\mathbb{T}^d$. Teorija distribucija na torusu $\mathbb{T}^d$ je mnogo jednostavnija nego one na $\mathbb{R}^d$. Kada se primeni Furijeova transformacija na funkcije definisane nad $\mathbb{T}^d$ one se preslikavaju u funkcije nad $\mathbb{Z}^d$. Na primer, temperirane distribucije postaju funkcije koje su polinomnog rasta u beskonačnosti nad mrežom $\mathbb{Z}^d$. Kod ovih funkcija nestaju problemi sa regularnosti jer su definisane na diskretnom skupu i u svakoj njegovoj tački što ćemo dalje koristiti kod mikrolokalne analize.

**Definicija 1.7.1.** *Funkcija* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *je* periodična sa periodom $T \in \mathbb{R}^d$ *ako*

$$\tau_T \varphi = \varphi; \tag{1.7.1}$$

*to znači da* $(\forall x \in \mathbb{R}^d) \;\; (\tau_T \varphi)(x) = \varphi(x - T) = \varphi(x)$.

**Definicija 1.7.2.** *Funkcija* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *je* periodična sa periodom 1 *ako*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^d) \;\; \tau_n \varphi = \varphi. \tag{1.7.2}$$

*To znači da* $(\tau_n \varphi)(x) = \varphi(x - n)$, *za svaki* $n \in \mathbb{Z}^d$. *Za ovo da važi, dovoljno je da*

$$\tau_{e_i} f = f, \;\; za \; i = 1, \dots, d,$$

*gde* $e_i$ *je* $i-$*ti koordinatni vektor standardne baze*

$$\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

*kod koga* 1 *je* $i$*-ta koordinata, a ostale koordinate su nule.*

Postoji i druga notacija za uvođenje periodičnih funkcija korišćenjem $d$–dimenzionalnog torusa $\mathbb{T}^d$. Pritom identifikujemo 1-periodične funkcije sa njihovim restrikcijama nad $[0, 1]^d$ ili sa njihovim projekcijama na $\mathbb{T}^d$. Na $\mathbb{R}^d$ uvodi se relacija ekvivalencije: $x \sim y$ ako i samo ako $x - y \in \mathbb{Z}^d$. Faktor prostor koji se dobija je $d$-dimenzionalni torus,

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \sim = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d.$$

Na primer kaže se da je $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$ ako je $f$ periodična na $\mathbb{R}^d$ i $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

**Definicija 1.7.3.** *Prostor m-puta neprekidno diferencijabilnih periodičnih funkcija označavamo sa* $\mathscr{C}^m(\mathbb{T}^d)$, *dok prostor test funkcija su elementi prostora*

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^d) := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathscr{C}^m(\mathbb{T}^d).$$

*To su periodične glatke funkcije u* $\mathbb{R}^d$. *Topologija u* $\mathscr{P}$ *može se zadati nizom normi*

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\substack{x\in(0,1)^d, x\in(0,1)^d\\ |\alpha|\le k}} |\varphi^{(\alpha)}(x)|, k \in \mathbb{N}.$$

Prostor $\mathscr{P}$ je Frešetov ali nije normiran. Vrlo je koristan prostor $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)$ koji sadrži sve periodične kvadratno-integrabilne funkcije na $[0,1)^d$.

Oznaka $\int_{\mathbb{T}^d}$ ima isto značenje kao i $\int_{[0,1)^d}$.

**Teorema 1.7.4.** $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)$ *je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom*

$$(f,g)_{\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)} := \int_{\mathbb{T}^d} u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Skup eksponencijala

$$B_{\mathscr{P}} = \{e_\xi : \mathscr{P} \ni x \mapsto e^{2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle} \in \mathbb{C}; \xi \in \mathbb{Z}^d, x \in \mathbb{T}^d\}$$

je ortonormalna baza za $\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)$ [3, 28].

Furijevi koeficijenti funkcije $f \in \mathscr{L}^2(T^d)$ su

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\langle \xi, x\rangle}dx \qquad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

U [2], teorema 9.6.2, str. 234, dokazan je sledeći rezultat koji ćemo koristiti:

**Teorema 1.7.5.** $\varphi \in \mathscr{P}$ *ako i samo ako*

$$\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n e_n,$$

*gde* $a_n = \int_{[0,1)^d} \varphi(x)e^{-2\pi \mathrm{i}\langle n,x\rangle}dx = \langle \varphi, e_{-n}\rangle = (\varphi, \overline{e_n}), n \in \mathbb{Z}^d$ *i*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^2 \langle n\rangle^{2k} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

Simbol $(\cdot, \cdot)$ označava skalarni proizvod u $\mathscr{L}^2([0,1)^d)$.

Dual prostora $\mathscr{P}$ je prostor periodičnih distribucija. Njega označavamo standardno sa $\mathscr{P}'$. To je u suštini prostor $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^d)$.

**Teorema 1.7.6.** *[2, Teorema 9.3.4, str. 225]: Svaka periodična distribucija je temperirana, t.j. $\mathscr{P}' \subset \mathscr{S}'$.*

Za periodične distribucije važrezultat analogan teoremi 1.7.5.

**Teorema 1.7.7.** *$f \in \mathscr{P}'$, ako i samo ako $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} b_n e_n$ , i*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |b_n|^2 \langle n\rangle^{-2k_0} < \infty, \quad \textit{za neki celi broj } k_0 > 0.$$

Dokaz se može naći na primer u [2, Teorema 9.6.1, str. 232]. Dejstvo periodične distribucije $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n e_n \in \mathscr{P}'$, nad $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} b_n e_n \in \mathscr{P}$, moguće je izraziti u obliku

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n b_n.$$

**Definicija 1.7.8.** *Sa $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$ označavamo prostor brzo opadajučih funkcija na $\mathbb{Z}^d$.*

$$\mathscr{S}(\mathbb{Z}^d) = \{\varphi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} : (\forall M < \infty)(\exists C_{\varphi,M})|\varphi(\xi)| \leqslant C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-M}\}.$$

*Na $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$ definiše se topologija pomoću seminormama*

$$p_k(\varphi) := \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^d} \langle\xi\rangle^k |\varphi(\xi)|, k \in \mathbb{N}.$$

**Definicija 1.7.9.** *Prostor linearnih neprekidnih funkcionala na $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$ nazivamo prostor temperiranih distribucija na $\mathbb{Z}^d$. To su funkcije $f : \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d) \to \mathbb{C}$ za koje važi:*

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} f(\xi)\varphi(\xi),$$

*i koje su najviše polinomnog rasta, t.j. postoje konstante $M < \infty$ i $C_{f,M}$, koja zavisi od $f$ i $M$, tako da za svako $\xi \in \mathbb{Z}^d$ važi*

$$|f(\xi)| \leqslant C_{f,M}\langle\xi\rangle^M.$$

*Za ovaj prostor koristi se oznaka $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^d)$.*

Koristeći gore navedene teoreme i oblik koeficijenata u redovima koji se u njima nalaze, dobijamo vezu između prostora $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$ pomoću takozvane periodične Furijeove transformacije.

**Definicija 1.7.10.** *Periodična (toroidalna) Furijeova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d} : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$, definisano sa*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}(f)(\xi) := \int_{[0,1)^d} e^{-2\pi \mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} f(x)dx,$$

*koja periodičnu glatku funkciju preslikava u niz njenih Furijeovih koeficijenata.*

**Teorema 1.7.11.** *$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}$ bijekcija.*

Inverzno preslikavanje je $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}^{-1} : \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$, definisano sa

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^d}^{-1}(g)(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} e^{2\pi \mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} g(\xi),$$

za svaki $g \in \mathscr{S}(\mathbb{Z}^d)$.

**Teorema 1.7.12** (Planšerel (Plancherel))**.** *Ako je $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)$ i $\hat{f}(n)$ je njeni $n$-ti Furijeov koeficijent, za $n \in \mathbb{Z}^d$. Tada možemo $f$ da zapišemo u obliku*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{\mathrm{i}2\pi\langle n,x\rangle}$$

*i važi*

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2. \tag{1.7.3}$$

*Drugačije zapisano,*

$$\|f\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)} = |\hat{f}|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}. \tag{1.7.4}$$

**Definicija 1.7.13.** *Za $1 \leqslant p < \infty$ sa $\mathscr{L}^p(\mathbb{T}^d)$ označavamo prostor svih $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T}^d)$ za kojih*

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p(\mathbb{T}^d)} := \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

*Za $p = \infty$ sa $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T}^d)$ označavamo prostor svih $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T}^d)$ za kojih*

$$\|f\|_{\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Ovi prostori su Banahovi [76].

**Posledica 1.7.14.** *[76] Neka je $1 \leq p \leq 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ako $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T}^d)$ tada je $\hat{f} \in \ell^q(\mathbb{Z}^d)$ i važi*

$$\|\hat{f}\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}^p(\mathbb{T}^d)}.$$

## 1.7.1 Soboljevski prostori periodičnih funkcija

**Definicija 1.7.15.** *Za $u \in \mathscr{P}$ i $s \in \mathbb{R}$ definišemo normu*

$$\|u\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)} := \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.7.5}$$

*Prostor Soboljeva $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je prostor svih 1-periodičnih distribucija $u$ za koje $\|u\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)} < \infty$. Njihov Furijeov razvoj glasi*

$$u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} \langle x, \xi \rangle}.$$

**Primer 1.7.16.** *1-periodična Dirakova delta $\delta$ je data sa*

$$\delta(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi \mathrm{i} \langle x, \xi \rangle} = (\hat{\delta}(\xi))_{\xi \in \mathbb{Z}^d}.$$

*Ispunjeno je*

$$\delta \in \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d) \Leftrightarrow s < -\frac{d}{2}$$

**Propozicija 1.7.17.** *Za svako $s \in \mathbb{R}$ prostor $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom*

$$(u, v)_{\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)}.$$

*Dokaz.* Preslikavanje $\phi_s : \mathscr{H}^0(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$, definisano sa

$$\phi_s(u)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{-s} \hat{u}(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} \langle x, \xi \rangle}$$

je kanonični izomorfizam i izometrija između prostora $\mathscr{H}^0(\mathbb{T}^d)$ i $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$. Radi $\mathscr{H}^0(\mathbb{T}^d) = \mathscr{L}^2(\mathbb{T}^d)$ sledi tačnost propozicije. □

**Propozicija 1.7.18.** *Za $k \in \mathbb{N}$ uobičajena Soboljevska norma glasi*

$$\|u\|_{k,stand} := \left( \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\mathbb{T}^d} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx| \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7.6}$$

*Norme* (1.7.5) *i* (1.7.6) *su ekvivalentne, t.j. postoji konstanta $C_s$ za koju*

$$\|u\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)} \leqslant \|u\|_{k,stand} \leqslant C_s \|u\|_{\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)}.$$

**Teorema 1.7.19.** *Banahov dual prostora $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je prostor $\mathscr{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$. Dejstvo operatora $v \in \mathscr{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ na $u \in \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je dato sa*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(\xi) \hat{v}(-\xi).$$

*Prostor $\mathscr{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ je i Hilbertov dual prostora $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$. Dejstvo operatora $v \in \mathscr{H}^{-s}(\mathbb{T}^d)$ na $u \in \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$ je dato sa*

$$(u, v)_{\mathscr{H}^0(\mathbb{T}^d)} := \int_{\mathbb{T}^d} u(x)\overline{v(x)}.$$

**Propozicija 1.7.20.** *Za $s < t$, ulaganje*

$$\mathscr{H}^t(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d)$$

*je kompaktno.*

**Propozicija 1.7.21.** *Neka je $m \in \mathbb{N}$, $s > m + \frac{d}{2}$. Tada $\mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d) \subset \mathscr{C}^m(\mathbb{T}^d)$.*

**Posledica 1.7.22.** *Važe jednakosti*

$$\cap_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^d) \quad i \quad \cup_{s\in\mathbb{R}} \mathscr{H}^s(\mathbb{T}^d) = \mathscr{P}(\mathbb{T}^d).$$

# Glava 2

# Množenje distribucija i talasni front

Multiplikativni proizvod distribucija je operacija koja je interesantna sama po sebe, međutim ima i dosta primena. Na primer, propagatori Fajnmana[1] su distribucije. Štukelberg[2] je primetio da je renormalizacija u suštini problem koji se svodi na definisanjem proizvoda distribucija u svojim radovima iz 1949-1951. [71, 94, 95]. Međutim Švarc je 1954. pokazao da proizvod distribucija nije moguće definisati nad prostorom čiji je potprostor prostor distribucija $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Fizičari su produžili da rade na problematiku krajem 50-tih godina [5, 6] i u ranim 70-tim godinama prošlog stoljeća [15] nakon čega je usledila velika pauza. Matematičari su u međuvremenu proučavali teorijske osnove na kojima bi se mogao definisati neki oblik proizvoda. Detaljniji pregled različitih definicija proizvoda distribucija je izložen u [59, 60]. Kasnije ćemo iskoristiti nekih od rezultata koji se tamo nalaze.

Talasni front (ili skup talasnog fronta) je pojam koji je nastao u periodu istraživanja koja se odnose na klasifikaciju singulariteta pomoću njihovog spektra i on se nalazi u osnovi mikrolokalne analize. Mikrolokalna analiza je deo analize u kome se proučavaju osobine distribucija (i ultradistribucija) ne samo pomoću osobina osnovnog prostora nego i korišćenjem kovarijable (frekvencije) preko njene Furijeove transformacije. Istoriski pregled razvoja mikrolokalne analize je dat na primer u [32, 9].

Prvi put koncept sličan talasnom frontu je uveden od Satoa [78, 79] koji

[1]R.Feynman
[2]Stueckelberg

je uveo pojam singularni nosač $SS(u)$ za hiperfunkcije i koji odgovara analitičkom talasnom frontu $WF_A$ kod distribucija. Talasni front (ili skup talasnog fronta) je kao takav uveden od Hermandera u [31] pomoću pseudo-diferencijalnih operatora. U obliku u kome ćemo ga mi koristiti uveden je od Hermandera u [30].

Do kraju 1990-ih talasni front se retko pojavljao kod rešavanja problema iz fizike. Tokom 1990-ih godina je pokazano da je skup talasnog fronta ključni u definisanju kvantnih polja u zakrivljenim prostor-vremenima, kod polja Diraka, kvantizaciju gravitacije itd. nakon čega je počelo intenzivno proučavanje različitih tipova skupova talasnog fronta.

Poznat je rezultat da proizvod dve distribucije može da se definiše ako njihovi talasni frontovi su "dobro" postavljeni u odnosu jedan na drugog. Ovo nas navodi da možemo proučavati proizvod i talasne frontove koristeći prostor periodičnih distribucija. U ovom delu koristeći proizvod periodičnih distribucija, dajemo novi pristup u opisivanju talasnog fronta i Soboljevskog talasnog fronta distribucije $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko koeficijente njenog razvoja u Furijeov red. Preciznije, proučavamo svojstva distribucije $f$ u $x_0 \in \mathbb{R}^d$ preko razmatranja razvoja u Furijeove redove neke periodizacije $\varphi f$, gde $\varphi$ je funkcija odsecanja u okolini tačke $x_0$.

U [33], su posmatrani skupovi talasnog fronta težinskog tipa preko upotrebe Gaborovih i dualnih Gaborovih frejmova koji zavise od dodatnog neprekidnog parametara $\varepsilon \to 0$. U [50] je dokazano da se klasčna Furijeova baza može iskoristiti za mikrolokalnu analizu. Ovaj pristup vodi ka diskretizovanim definicijama talasnog fronta preko Furijeove koeficijente. Ovo je glavni rezultat. Pored njega dokazana je i ekvivalencija između ove diskretizovane definicije i pristupa Hermandera.

U dokazu se koriste rezultati izloženi u već citiranim radovima [82, 100, 88, 2, 3, 36]. U [101] se razmatra primena kod sumabilnosti Furijeovih redova. Ova problematika je dosta aktuelna. U kontekstu ovoga vredi napomenuti da u radu [76] i u knjigu [77], autori Ružanski[3] i Turunen[4] su proučavali generalizovane funkcije na torusu $\mathbb{T}^d$. Međutim, u njihovim radovima glavni interes su pseudo-diferencijalni operatori i mikrolokalna analiza na $\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d$.

Sa druge strane, Hermanderov koncept (skupa) talasnog fronta privlači dosta pažnje između matematičarima i postoji ogromna literatura koja je povezana sa ovim baznim pojmom i njegovu važnu ulogu u kvalitativnoj analizi

[3]Michael Ruzhansky
[4]Ville Turunen

parcijalnih diferencijalnih jednačina i pseudo-diferencijalnih operatora. Ovde ćemo pomenuti osnovne knjige Hermandera [32, 29] kao standardne reference za skupove talasnog fronta klasičnog i Soboljevskog tipa; u radovima [68, 33] su posmatrani talasni frontovi težinskog tipa, dok u [12, 13] su proučavani talasni frontovi preko lokalnih i globalnih verzija u odnosu na različite Banahove i Frešetove funkcionalne prostore.

U delu 5.4 je izložen elementarni pristup lokalnog množenja koji se bazira na Furijeove redove. Glavni rezultati su izloženi u delu 2.4 i 2.5. U teoremi 2.4.1 i teoremi 2.5.2 karakterišemo talasnog fronta i Soboljevskog talasnog fronta distribucije $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko ocenjivanja Furijeovih koeficijenta njenih lokalizacija.

Napominjemo opet da toroidalni talasni frontovi su izučavani u [76, 77] koristeći Furijeove redove kao i u [50]. Pristup koji je izložen se dosta razlikuje i povezan je preciznije sa Hermanderovim talasnim frontom .

Takođe, važno je istaknuti da Soboljevski talasni front nije izučavan u [76, 77]. Najprije ćemo predstaviti problem množenja distribucija, teorema Pejli-Vinera koju ćemo koristiti kod definiciju talasnog fronta i navešćemo definicije talasnog fronta. Nakon toga ćemo dati pristup množenja distribucija koji se bazira na njihovih periodizacija. Na kraju prezentiramo rezultate iz [51].

## 2.1 Proizvod distribucija

Videli smo da je u prostorima distribucija moguće definisati neke operacije koje su produženja odgovarajućih operacija u $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$: zbir dve distribucija, množenje distribucije sa skalarom i množenje distribucije sa glatkom funkcijom. Ove operacije su takozvane regularne operacije. Proizvod dve distribucije se ne može definisati u opštem slučaju kao operacija koja je ekstenzija operacije množenja neprekidnih funkcija.

**Primer 2.1.1.** *[86] Neka je $E$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva i $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ je njegov potprostor. Nije moguće definisati operaciju množenja na celom $E$ kao bilinearnu asocijativnu operaciju (nije neophodno da bude komutativna) i:*

1. *koja se na $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ poklapa sa običnim množenjem,*

2. *sa jediničnim elementom $1$,*

3. *za koju postoje elementi p.v.$(\frac{1}{x}) \in E$, $\delta \in E$ za kojih je ispunjeno:*

$$p.v.\frac{1}{x}\cdot x=1,\qquad x\cdot\delta=0\qquad \delta\neq 0.$$

*Zaista, ako uzmemo da* $p.v.(\frac{1}{x})(\varphi)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ *za svako* $\varphi\in\mathscr{S}$*, tada*

$$(\delta\cdot x)\cdot p.v.\left(\frac{1}{x}\right)=0,\qquad \delta\cdot\left(x\cdot p.v.\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\delta.$$

*Sledi da ne postoji natpostor prostora* $\mathscr{D}$ *u kome su multiplikativni proizvod i diferenciranje dobro definisani.*

Glavni razlog zbog koga nije moguće proširenje proizvoda neprekidnih (regularnih) funkcija do proizvod distribucija je to da, za razliku od funkcija koje su definisane u svakoj tački posebno, distribucije su definisane na okoline, a vrednost distribucije u svakoj tački nije definisana u opštem slučaju. Operacija množenja distribucija moguće je definisati u nekim slučajevima.

Ako singularni nosači dve distribucije su disjunktni, onda njihov proizvod postoji.

**Teorema 2.1.2.** *[67] Neka* $f,g\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ *i*

$$\text{sing supp}(f)\ \cap\ \text{sing supp}(g)=\emptyset.$$

*Ako* $x\notin(\text{sing supp}(f)\cap\text{sing supp}(g))$*, postoji otvorena okolina* $U_x$ *tačke* $x$ *u kojoj je* $f$ *ili* $g$ *glatka funkcija i distribucija* $h$ *je definisana sa*

$$h(t)=f_x(t)g(t)\ \textit{ili}\ h(t)=g_x(t)f(t),\quad x\in U_x,$$

*u smislu definicije proizvoda glatke funkcije i distribucije nad* $U_x$*. (Sa* $f_x$*, odnosno* $g_x$*, smo označili restrikciju distribucije* $f$*, odnosno* $g$*, nad* $U_x$*).*

### 2.1.1 Teoreme tipa Pejli-Vinera–a

Kako je navedeno u [93], pod teoreme tipa Pejli-Vinera–a (Paley-Wiener) misli se na rezultate koji karakterišu neku informaciju o nosaču distribucije (ili funkcije) $f$ preko uslovima analitičnosti njene Furijeove transformacije $\hat{f}$. Radi se glavno o tome da se karakterišu osobine $f$ koristeći osobine njene Furijeove transformacije $\hat{f}$ i obratno. Najčešće se koristu dva principa [28]:

a) princip glatkosti i opadanja - ako je $f$ glatka, tada $\hat{f}$ opada brzo; ako $f$ brzo opada, tada je $\hat{f}$ glatka i

b) princip neodređenosti - $f$ i $\hat{f}$ ne mogu da istovremeno imaju male vrednosti.

Originalna teorema Pejli-Vinera dokazana je 1934. godine u [61] i odnosila se na $\mathscr{L}^2$ funkcije dok Švarc je dokazao njeni analog za distribucije i zbog toga se ova teorema dosta često naziva imenom teorema Pejli-Viner-Švarc–a. Za $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d$ koristimo oznake

$$|\zeta| = (|\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_d|^2)^{\frac{1}{2}}, \langle|\zeta|\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ i } \operatorname{Im}(\zeta) = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2}.$$

**Definicija 2.1.3.** *Ako je $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, tada* Furije-Laplasova transformacija *distribucije $f$ je*

$$\hat{f}(\zeta) = \int e^{-\mathrm{i}\,\langle x,\zeta\rangle} f(x)dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \tag{2.1.1}$$

Restrikcija distribucije $\hat{f}$ nad $\mathbb{R}^d$ je Furijeova transformacija distribucije $f$. Furije-Laplasova transformacija ima neka korisna svojstva koja navodimo.

**Teorema 2.1.4.** *[18] Ako je $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ tada njena Furije-Laplasova transformacija, $\hat{f}(\zeta)$ je analitička funkcija na $\mathbb{C}^d$.*

**Definicija 2.1.5.** *Ako je $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ kompaktan skup, definišemo njenu noseću (eng. supporting) funkciju skupa $K$ sa*

$$H_K(\xi) := \sup_{x \in K} \langle x, \xi \rangle, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.2}$$

*i ako je* $\operatorname{ch}(K)$ *konveksni omotač skupa $K$, tada*

$$x \in \operatorname{ch}(K) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^d)\ \langle x, \xi \rangle \leqslant H_K(\xi). \tag{2.1.3}$$

**Teorema 2.1.6** (Pejli-Viner-Švarc)**.** *[32]*

*(i) Ako $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$,* $\operatorname{supp} f \subseteq K \subset\subset \mathbb{R}^d$ *i red distribucije $f$ je $N$, tada postoji konstanta $C$ tako da*

$$|\hat{f}(\zeta)| \leqq C \langle|\zeta|\rangle^N e^{H(\operatorname{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \tag{2.1.4}$$

*Obratno, svaka cela analitička funkcija $F$ za koju važi ograničenje*

$$|F(\zeta)| \leqq C \langle|\zeta|\rangle^N e^{H(\operatorname{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d, \tag{2.1.5}$$

*je Furije-Laplasova transformacija neke distribucije iz $\mathscr{E}'$ sa nosačem sadržanim u $K$.*

*(ii) Ako $f \in \mathscr{C}_0^\infty(K)$ tada*

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad |\hat{f}(\zeta)| \leqq C\langle|\zeta|\rangle^{-N} e^{H(\mathrm{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.6)$$

*Obratno, ako je $F$ cela analitička funkcija za koju važi*

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad |F(\zeta)| \leqq C\langle|\zeta|\rangle^{-N} e^{H(\mathrm{Im}(\zeta))}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1.7)$$

*tada je $F$ Furije-Laplasova transformacija neke funkcije $f \in \mathscr{C}_0^\infty(K)$.*

Ono što je karakteristično je da brzina rasta u imaginarnom delu opredeljuje nosač inverzne Furijeove transformacije.

## 2.2 Talasni front distribucije

Kod definicije talasnog fronta koristimo konusne okoline nekog pravca.

**Definicija 2.2.1.** *Skup $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ je konus ako $\xi \in \Gamma$ povlači*

$$(\forall \lambda > 0) \quad \lambda\xi \in \Gamma.$$

*Konusna okolina tačke $\xi$ je otvoren konus koji sadrži $\xi$.*

Za $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ možemo odrediti dali pripada u $\mathscr{C}_0^\infty$ procenom rasta njene Furijeove transformacije $\mathcal{F}(f)$ u beskonačnosti. Ako $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, tada

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leqq C_n(1+|\xi|)^{-N} \quad \text{ili} \quad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leqq C_n \langle\xi\rangle^{-N}. \quad (2.2.1)$$

**Definicija 2.2.2.** *Ako $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ tada $\xi_0 \notin \Sigma(f) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ako i samo ako postoji konusna okolina $\Gamma_{\xi_0}$ tačke $\xi_0$ tako da za svako $\xi \in \Gamma_{\xi_0}$ i za svako $N > 0$, postoji konstanta $C_N > 0$ tako da*

$$|\hat{f}(\xi)| \leqq C_N\langle\xi\rangle^{-N}.$$

Navodimo Hermanderovu definiciju za talasni front.

**Definicija 2.2.3.** *Ako $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, kažemo da tačka $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ ne pripada skupu talasnog fronta (talasnom frontu) $WF(f)$ ako i samo ako postoji $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, tako da $\varphi(x_0) \neq 0$ i $\xi_0 \notin \Sigma(\varphi f)$,t.j.*

$$(\exists \Gamma_{\xi_0} \ni \xi_0)(\forall \xi \in \Gamma_{\xi_0})(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad \left|\widehat{\varphi f}(\xi)\right| \leqq C_N\langle\xi\rangle^{-N}. \quad (2.2.2)$$

**Definicija 2.2.4.** *Ako je $X \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoreni skup i $f \in \mathscr{D}'(X)$, kažemo da tačka $(x_0, \xi_0) \in X \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,*

$$(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$$

*ako i samo ako postoji $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(X)$, tako da $\varphi(x_0) \neq 0$ i $\xi_0 \notin \Sigma(\varphi f)$,t.j.*

$$(\exists \Gamma_{\xi_0} \ni \xi_0)(\forall \xi \in \Gamma_{\xi_0})(\forall N > 0)(\exists C_N > 0) \quad \left|\widehat{\varphi f}(\xi)\right| \leqq C_N \langle \xi \rangle^{-N}. \quad (2.2.3)$$

## 2.3 Periodične ekstenzije distribucija

Od sada pa nadalje u ovom delu reč *periodična* se odnosi na funkcije ili distribucije nad $\mathbb{R}^d$ koje su periodične sa periodom 1 u odnosu na svaku od promenljivih, t.j. $f(x+n) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Sa $e_y$ se označava $e_y(x) = e^{2\pi \mathrm{i} \langle y, x \rangle}$, $y \in \mathbb{Z}^d$.

**Definicija 2.3.1.** *Ako distribucija $g$ ima nosač sadržan u interval $I_{\eta, x_0}$, gde $0 < \eta < 1$, periodični produžetak (ekstenzija) lokalizacije distribucije $g$ u nekoj okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$ je*

$$g_p(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} g(x+n).$$

Mi ćemo koristiti periodične ekstenzije nekih lokalizacija distribucije.

### 2.3.1 Težinske funkcije

U opštem slučaju, težinska funkcija je nenegativna funkcija.

**Definicija 2.3.2.** *Neka su $\omega$ i $\nu$ dve nenegativne funkcije. Tada*

*(i) funkcija $\nu$ je* submultiplikativna *ako*

$$\nu(x+y) \leq \nu(x)\nu(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

*(ii) funkcija $\omega$ je $\nu$ je $\nu$–*ograničena *ako postoji konstanta $C > 0$*

$$\omega(x+y) \leq \nu(x)\omega(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

Submultiplikativnost funkcije $\nu$ povlači da je ona ograničena nekom eksponencijalnom funkcijom, t.j. da postoje konstante $C$ i $k$, tako da

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nu(x) \leq Ce^{k|x|}.$$

Mi ćemo se zadržati na pozitivnim težinskim funkcijama na $\mathbb{Z}^d$. Kažemo da funkcija $\omega$ je *$\nu$-ograničena težinska funkcija* na $\mathbb{Z}^d$, ako postoji $C > 0$ tako da

$$\omega(m+n) \leq C\omega(m)\nu(n), \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.3.1}$$

Ako je $\nu$ polinom, tada kažemo da je funkcija $\omega$ *polinomno ograničena*.

Skup koji se sastoji od svih polinomno ograničenih težinskih funkcija na $\mathbb{Z}^d$ označavamo sa $\mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$. Za $\omega \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$, definišemo Banahov prostor

$$\mathscr{P}l^q_\omega = \{f \in \mathscr{P}' : (\omega(n)f_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^q, \ \text{gde } f_n = \langle f, e_{-n}\rangle\}$$

sa normom

$$\|f\|_{\mathscr{P}l^q_\omega} = \|(\omega(n)f_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell^q} = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}(\omega(n)|f_n|)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Mi ćemo razmatrati samo vrednosti za $q \geq 1$.

**Propozicija 2.3.3.** *Ako $q_1 \leq q_2$ i $\omega_2 \leq C\omega_1$, onda $\mathscr{P}l^{q_1}_{\omega_1} \subseteq \mathscr{P}l^{q_2}_{\omega_2}$.*

Biće razmatrani lokalni prostori $\mathscr{P}l^q_{\omega,loc}$ koji sadržu distribucije $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ za koje periodične ekstenzije $(\varphi f)_p \in \mathscr{P}l^q_\omega$, za svako $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathscr{D}(I_{1,x_0})$. Topologija u njima je definisana familijom seminormi $\|f\|_{x_0,\varphi} = \|(\varphi f)_p\|_{\mathscr{P}l^q_\omega}$, gde $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathscr{D}(I_{1,x_0})$.

**Propozicija 2.3.4.** $\mathscr{P}l^q_\omega \subset \mathscr{P}l^q_{\omega,loc}$.

*Dokaz.* Neka $f \in \mathscr{P}l^q_\omega$ i $\varphi \in \mathscr{D}(I_{1,x_0})$. Tada $(\varphi f)_p = \varphi_p f$. Razvijamo distribuciju $f$ i periodično produženje $\varphi$ u njihove Furijeove redove, $f = \sum_n f_n e_n$ i $\varphi_p = \sum_n \varphi_n e_n \in \mathscr{P}$. Koristeći (2.3.1) i generalizovanu nejednakost Minkovskog, dobijamo

$$\begin{aligned}\|\varphi_p f\|_{\mathscr{P}l^q_\omega} &\leq C\Big(\sum_n\Big(\sum_j \nu(j)|\varphi_j|\,\omega(n-j)|f_{n-j}|\Big)^q\Big)^{1/q}\\ &\leq C\sum_j\Big(\sum_n\big(\nu(j)|\varphi_j|\,\omega(n-j)|f_{n-j}|\big)^q\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

$$= C\sum_j (\nu(j)|\varphi_j|)\Big(\sum_n \big(\omega(n-j)|f_{n-j}|\big)^q\Big)^{1/q}$$
$$= C\|\varphi_p\|_{\mathscr{P}l^1_\nu}\|f\|_{\mathscr{P}l^q_\omega} < \infty.$$

Ovim je pokazano da je prostor $\mathscr{P}l^q_{\omega,loc}$ dobro definisan. $\square$

Neka je $\omega_s(n) = \langle n\rangle^s$, $s \in \mathbb{R}$. Radi jednostavnosti, pišemo

$$\mathscr{P}l^q_s := \mathscr{P}l^q_{\omega_s} \qquad \text{i} \qquad \mathscr{P}l^q_{s,loc} := \mathscr{P}l^q_{\omega_s,loc}.$$

**Propozicija 2.3.5.** *Ispunjene su sledeće relacije:*

$$\mathscr{P} = \bigcap_{s\geq 0}\mathscr{P}l^q_s = \bigcap_{\omega\in\mathscr{P}ol(\mathbb{Z}^q)}\mathscr{P}l^q_\omega\,, \qquad \mathscr{P}' = \bigcup_{s\leq 0}\mathscr{P}l^q_s = \bigcup_{\omega\in\mathscr{P}ol(\mathbb{Z}^q)}\mathscr{P}l^q_\omega\,.$$

*Štaviše,*

$$\mathscr{E} = \bigcap_{s\geq 0}\mathscr{P}l^q_{s,loc} = \bigcap_{\omega\in\mathscr{P}ol(\mathbb{Z}^q)}\mathscr{P}l^q_{\omega,loc}\,, \qquad \mathscr{D}'_F = \bigcup_{s\leq 0}\mathscr{P}l^q_{s,loc} = \bigcup_{\omega\in\mathscr{P}ol(\mathbb{Z}^q)}\mathscr{P}l^q_{\omega,loc}\,,$$

*gde sa $\mathscr{E}$ označavamo prostor svih glatkih funkcija dok $\mathscr{D}'_F$ je prostor distribucija konačnog reda na $\mathbb{R}^d$.*

*Dokaz.* Direktno sledi iz 1.6.9 i 1.6.10. $\square$

### 2.3.2 Množenje u potprostorima distribucija

U ovom delu ćemo izneti neke tvrdnje koje se odnose na množenju distribucija. Pretpostavljamo da indeksi $q, q_1, q_2 \in [1,\infty]$ su takvi da

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + 1.$$

Fiksiramo dve težinske funkcije $\omega, \nu \in \mathcal{P}ol(\mathbb{Z}^d)$ i pretpostavljamo da $\omega$ je $\nu$–ograničena (videti (2.3.1)).

Posmatramo proizvode u prostorima tipa $\mathscr{P}l^q_\omega$. Definišimo proizvod preko Furijeovih koeficijenata.

**Definicija 2.3.6.** *Za dve date*

$$f_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_{1,n}e_n \in \mathscr{P}l^{q_1}_\omega,\ f_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_{2,n}e_n \in \mathscr{P}l^{q_2}_\nu,$$

*definišemo njihov proizvod sa* $f := f_1 f_2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_n e_n$*, gde*

$$f_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} f_{1,n-j} f_{2,j}, \;\; n \in \mathbb{Z}^d.$$

*Primedba* 2.3.7. Moramo primetiti da je formula za Furijeove koeficijente $f_n$ isto što i formula konvolucije na cjelobrojnoj mreži.

U Propoziciju 2.3.9 ćemo dokazati da za proizvod iz Definicije 2.3.6 važi $f \in \mathscr{P}l^q_\omega$. Iskoristićemo prethodnu definiciju da definišemo množenje na lokalnim verzijama ovih prostora.

**Definicija 2.3.8.** *Neka je* $f_1 \in \mathscr{P}l^{q_1}_{\omega,loc}$ *i* $f_2 \in \mathscr{P}l^{q_2}_{\nu,loc}$*. Njihov proizvod* $f := f_1 f_2$ *definišemo produžavajući lokalno: za* $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *i* $0 < \eta < 1$*, neka* $\phi \in \mathscr{D}(I_{1,x_0})$ *je takva da* $\phi(x) = 1$ *za* $x \in I_{\eta,x_0}$*. Definišemo* $f_{I_{\eta,x_0}} \in \mathscr{D}'(I_{\eta,x_0})$ *kao restrikciju* $(\phi f_1)_p(\phi f_2)_p$ *na* $I_{\eta,x_0}$*.*

Ovde je važno naglasiti da različiti izbori funkcije $\phi$ vode ka različitim Furijeovim koeficijentima u razvoju. Međutim, prema propoziciji 2.3.4, važi $f_{I_{\eta,x_0}} = f_{I_{\eta',x_0'}}$ na $I_{\eta,x_0} \cap I_{\eta',x_0'}$. Prema tome, od $\{f_{I_{\eta,x_0}}\}$ dobija se distribucija $f \in \mathscr{P}l^q_{\omega,loc}$ i definišemo proizvod $f_1 f_2 := f$.

**Propozicija 2.3.9.** *Preslikavanja*

$$\mathscr{P}l^{q_1}_\omega \times \mathscr{P}l^{q_2}_\nu \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^q_\omega \tag{2.3.2}$$

*i*

$$\mathscr{P}l^{q_1}_{\omega,loc} \times \mathscr{P}l^{q_2}_{\nu,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^q_{\omega,loc} \tag{2.3.3}$$

*su neprekidna.*

*Dokaz.* Neprekidnost (5.4.2) sledi od neprekidnosti (5.4.1). Za (5.4.1), koristeći Jangovu nejednakost i (2.3.1) dobijamo

$$\|f_1 f_2\|_{\mathscr{P}l^q_\omega} \leq C \|f_1\|_{\mathscr{P}l^{q_1}_\omega} \|f_2\|_{\mathscr{P}l^{q_2}_\nu}.$$

□

Možemo izvesti i sledeći rezultat:

**Posledica 2.3.10.** *Neka* $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ *su takvi da*

$$s_1 + s_2 \geq 0, \qquad s \leq \min\{s_1, s_2\}. \tag{2.3.4}$$

*Tada preslikavanja* $\mathscr{P}l^{q_1}_{s_1} \times \mathscr{P}l^{q_2}_{s_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^q_s$ *i* $\mathscr{P}l^{q_1}_{s_1,loc} \times \mathscr{P}l^{q_2}_{s_2,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^q_{s,loc}$ *su neprekidna.*

*Dokaz.* Može se pretpostaviti da $s_1 \geq 0$ i $s = s_2$. Očigledno je da mora da važi $s_1 \geq |s_2|$ kako bi bilo ispunjeno $s_1 + s_2 \geq 0$. Rezultat onda sledi od propozicije 2.3.9 kada se stavi $\omega(n) = \langle n \rangle^{s_2}$ i $\nu(n) = \langle n \rangle^{s_1}$ jer (2.3.1) važi za njih. $\square$

Što se tiče lokalnih proizvoda u posljedici 2.3.10, korišćenjem istog metoda iz dokaza teoreme 2.5.2 može se dokazati da lokalni prostor $\mathscr{P}l^2_{s,loc}$ se sovpada da lokalnim prostorom Soboljev–a $H^s_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Prema tome, multiplikativni proizvod za lokalne prostore u posledicu 2.3.10 se slaže sa onim definisanog od strane Hermandera [29, Sect. 8.2]. Shtaviše, treba napomenuti da naši rezultati koji su izloženi u nastavku povlače da se može ići i dalje od lokalnih proizvoda i u stvari da se definiše multiplikativni proizvod preko *mikrolokalizaciju* kao i u [29, Sect. 8.3].

Teorema 2.5.2 kaže da je mikrolokalna verzija našeg množenja saglasna sa onom kod Hermandera.

## 2.4 Talasni front distribucije preko periodičnih ekstenzija distribucije

U ovom del naš je cilj da opišemo talasni front distribucije $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ preko koeficijente Furijeovog razvoja periodičnog proširenja neke respektivne lokalizacije $f$ u okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$, kao što smo objasnili u prethodnom zaglavju. Kao što smo i ranije rekli, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ ako postoje $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ za koju $\psi \equiv 1$ u nekoj okolini $x_0$ i otvoreni konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ koji sadrži $\xi_0$ takav da

$$(\forall N > 0)(\exists C_N > 0)(\forall \xi \in \Gamma)(|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}). \tag{2.4.1}$$

Pomoću sledeće teoreme dokazujemo da možemo diskretizirati (2.4.1) :

**Teorema 2.4.1.** *Neka $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

*(i) Postoji $\phi \in \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$, sa $\varepsilon \in (0,1)$ i $\phi \equiv 1$ u okolini $x_0$, i otvoreni konus $\Gamma$ koji sadrži $\xi_0$ tako da*

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists C_N > 0)(\forall n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d)(|\widehat{\phi f}(n)| \leq C_N \langle n \rangle^{-N}). \tag{2.4.2}$$

*(ii) $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$.*

*Dokaz.* Poznato je da sa stešnjavanjem konusne okoline $\xi_0$, može se izabrati $\psi$ u (2.4.1) sa proizvoljno malim nosačem u okolini $x_0$. Znači, $(ii)$ povlači $(i)$.

Prema tome dovoljno je da pokažemo da $(i)$ povlači $(ii)$.

Neka je ispunjen uslov $(i)$. Razdelićemo dokaz na dva dela. Prvo ćemo dokazati da postoje $\varepsilon'$ i otvoren konus $\xi_0 \in \Gamma_1$ takvi da

$$(\forall B \text{ ograničen skup u } \mathscr{D}(I_{\varepsilon',x_0}))(\forall N > 0)(\exists C'_N > 0)$$
$$(\forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d)(\sup_{\varphi \in B} |\widehat{\varphi f}(n)| \leq \frac{C'_N}{\langle n \rangle^N}). \tag{2.4.3}$$

Biramo $\varepsilon'$ tako da $\phi(x) = 1$ za svaki $x \in I_{\varepsilon',x_0}$. Za konus biramo $\Gamma_1$ da bude otvoreni konus sa $\xi_0 \in \Gamma_1$ i $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Pokazaćemo da (2.4.3) važi pod ovim pretpostavkama. Neka $0 < c < 1$ je konstanta manja od rastojanja između $\partial\Gamma$ i preseka $\overline{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom. Jasno je da $\left\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_1)(|\xi - y| \leq c|\xi|)\right\} \subset \Gamma$. Neka $B \subset \mathscr{D}(I_{\varepsilon',x_0})$ je ograničen skup. Za svaku $\varphi \in B$ je ispunjeno da $\phi\varphi = \varphi$. Štaviše, važno je primetiti da $\widehat{\varphi f}(n)$ su tačno Furijeovi koeficijenti periodične distribucije $(\varphi)_p(\phi f)_p$. Prema tome, za $\varphi \in B$ i $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\varphi f}(n)\right| = \left|\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(j)\widehat{\phi f}(n-j)\right| &\leq (\sum_{|j| \leq c|n|} + \sum_{|j| > c|n|})|\widehat{\varphi}(j)\widehat{\phi f}(n-j)| \\ &=: I_1(n) + I_2(n)\end{aligned}$$

Sada ćemo ograničiti izraze $I_1(n)$ i $I_2(n)$:

$$I_1(n) = \sum_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\varphi}(n-j)||\widehat{\phi f}(j)| \leq C \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)|,$$

gde konstanta $C$ zavisi jedino od $B$. Od $|n-j| \leq c|n|$ sledi da $|j| \geq (1-c)|n|$,

$$\begin{aligned}&\sup_{\varphi \in B,\, n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N I_1(n) \leq C \sup_{n \in \Gamma_1} \langle n \rangle^N \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)| \\ &\leq C \sup_{j \in \Gamma_{\xi_0}} (1-c)^{-N} \langle j \rangle^N |\widehat{\phi f}(j)| = C(1-c)^{-N} C_N.\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Za ocenu izraza $I_2$ koristimo da ako $|j| \geq c|n|$ tada $|n-j| \leq (1+c^{-1})|j|$. Štaviše, koristeći teoremu Paley-Wiener–a, postoje konstante $M, D > 0$ za koje

$$|\widehat{\phi f}(n-j)| \leq D\langle n-j \rangle^M, \quad n, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Ako iskoristimo ograničenost skupa $B \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, dobijamo

$$\sup_{\varphi\in B}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\langle j\rangle^{M+N}|\widehat{\varphi}(j)| =: K_N < \infty.$$

Tako, za drugog sabirka $I_2(n)$, imamo da za svaki element $\varphi \in B$ je ispunjeno

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\Gamma_1}\langle n\rangle^N I_2(n) &\leq D\sup_{n\in\Gamma_1}\langle n\rangle^N\sum_{|j|\geq c|n|}\langle n-j\rangle^M|\widehat{\varphi}(j)| \\ &\leq Dc^{-N}(1+c^{-1})^M K_N.\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Kombiniranjem rezultata (2.4.4) i (2.4.5), dobijamo (2.4.3).

Sada možemo da zaključimo da $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$ pomoću uslova (2.4.3). Neka je $\psi\in\mathscr{D}(I_{\varepsilon',x_0})$ jednaka 1 u okolini tačke $x_0$. Tada, skup $B=\{\varphi_t := \psi e_{-t} :\ t\in[0,1)^d\}$ je ograničeni podskup od $\mathscr{D}(I_{\varepsilon',x_0})$. Znači

$$\sup_{t\in[0,1)^d}|\widehat{\psi f}(n+t)| = \sup_{t\in[0,1)^d}|\widehat{\varphi_t f}(n)| \leq \frac{C'_N}{\langle n\rangle^N},\quad \forall n\in\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d,$$

t.j.

$$\sup_{\xi\in(\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d)+[0,1)^d}\langle\xi\rangle^N|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq (1+4d)^{N/2}C'_N. \tag{2.4.6}$$

Biramo otvorenu konusnu okolinu $\Gamma_2$ tačke $\xi_0$ tako da $\overline{\Gamma}_2\subset\Gamma_1\cup\{0\}$ i biramo $c'$ tako da $\left\{y\in\mathbb{R}^d : (\exists\xi\in\Gamma_2)(|\xi-y|\leq c'|\xi|)\right\}\subset\Gamma_1$. Zadnji uslov povlači da $\Gamma_2\cap\{\xi\in\mathbb{R}^d :\ |\xi|c'\geq 1\}\subset(\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d)+[0,1)^d$ i prema tome

$$\sup_{\xi\in\Gamma_2}\langle\xi\rangle^N|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq \max\{C''_N,(1+4d)^{N/2}C'_N\} = C_N < \infty,$$

gde $C''_N = \sup_{\xi\in\Gamma_2,\,|\xi|<1/c'}\langle\xi\rangle^N|\widehat{\psi f}(\xi)|$. Ovo znači da je ispunjeno $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$, čime je dokaz završen. □

Teorem 2.4.1 u stvari sledi od relacije između skupova diskretnog i Hermanderovog talasnog fronta dokazanu u teoremi 7.4 u [76], kada se zabeleži da je pojam lokalan i prema tome, ne zavisi od parametrizacije.

## 2.5 Soboljevski talasni front

U ovom delu ćemo razmatrati talasne frontove Soboljevskog tipa. Malo ćemo prilagoditi Hermanderovu definiciju [29].

**Definicija 2.5.1.** *Neka je* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ *i* $s \in \mathbb{R}$. *Kažemo da je f Soboljevski mikrolokalno regularna u* $(x_0, \xi_0)$ *reda s, t.j.* $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(f)$, *ako postoji otvoreni konus* $\Gamma$, $\xi_0 \in \Gamma$, *i* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \equiv 1$ *u okolini* $x_0$, *tako da*

$$\int_\Gamma \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{2.5.1}$$

Malo ćemo prilagoditi teoremu 2.4.1:

**Teorema 2.5.2.** *Neka je* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. *Sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

*(i) Postoji otvoreni konus* $\Gamma$ *koji sadrži* $\xi_0$, $\phi \in \mathscr{D}(I_{\eta,x_0})$, $\eta \in (0,1)$ *i* $\phi \equiv 1$ *u okolini* $x_0$, *tako da*

$$\sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |a_n|^2 < \infty, \quad \text{gde } (\phi f)_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e_n. \tag{2.5.2}$$

*(ii)* $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(f)$.

*Dokaz.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je ispunjen uslov (2.5.2). Biramo otvoreni konus $\Gamma_1$ tako da $\overline{\Gamma_1} \subset \Gamma \cup \{0\}$ i $\xi_0 \in \Gamma_1$. Onda biramo $\varepsilon \in (0, \eta)$ tako da za svaki $x \in I_{\varepsilon,x_0}$ bude ispunjeno $\phi(x) = 1$.

Prvo ćemo pokazati sledeću tvrdnju:

**Propozicija 2.5.3.** *Za svaki ograničeni skup* $B \subset \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$ *važi*

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\varphi f}(n)|^2 < \infty. \tag{2.5.3}$$

*Dokaz propozicije.* Fiksiramo ograničeni podskup $B \subset \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$. Od izbora konstante $\varepsilon$, imamo $\varphi f = \phi \varphi f$ i prema tome $\widehat{\varphi f}(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \widehat{\varphi}(n-j)$, za svaku $\varphi \in B$. Fiksiramo konstantu $0 < c < 1$ koja je manja od rastojanja između ruba konusa $\partial\Gamma$ i preseka adherencije $\overline{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom, a u isto vreme i manja od rastojanja između ruba $\partial\Gamma_1$ i preseka skupa $\overline{\mathbb{R}^d \setminus \Gamma}$ sa jediničnom sferom. Važi da ako $\xi \in \Gamma_1$ i $y \notin \Gamma$, tada $|\xi - y| > c \max\{|\xi|, |y|\}$. Ostavljamo da $\varphi \in B$. Od nejednačine Pitrea, dobijamo

$$\left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\varphi f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \, \langle n-j \rangle^{|s|} \, |\widehat{\varphi}(n-j)| \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq C(I_1(\varphi) + I_2(\varphi)),$$

gde

$$I_1(\varphi) = \left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left( \sum_{j \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \, \langle n - j \rangle^{|s|} \, |\widehat{\varphi}(n - j)| \right)^2 \right)^{1/2}$$

i

$$I_2(\varphi) = \left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left( \sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^s |a_j| \, \langle n - j \rangle^{|s|} \, |\widehat{\varphi}(n - j)| \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Od nejednačine Janga i činjenice da je $B$ ograničen skup, dobija se da

$$\sup_{\varphi \in B} I_1(\varphi) \leq \left( \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |a_n|^2 \right)^{1/2} \sup_{\varphi \in B} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{|s|} |\varphi(n)| < \infty.$$

Sada ćemo ograničiti $I_2(\varphi)$. Imajući u vidu da $\phi f$ ima kompaktan nosač,

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^d) \qquad \langle j \rangle^s |a_j| = \langle j \rangle^s |\widehat{\phi f}(j)| \leq D \langle j \rangle^k,$$

za neke $D > 0$ i $k > 0$. Činjenica da je $B$ ograničen skup daje egzistenciju konstante $C' > 0$ tako da

$$|\widehat{\varphi}(j)| \leq C' \langle j \rangle^{-k-|s|-3(d+1)/2}.$$

Od izbora $\Gamma_1$, imamo

$$\sup_{\varphi \in B} (I_2(\varphi))^2 \leq (DC')^2 \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \left( \sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^k \langle n - j \rangle^{-k-3(d+1)/2} \right)^2$$

$$\leq (DC')^2 c^{-2k-3(d+1)} \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{-d-1} \left( \sum_{j \notin \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \langle j \rangle^{-d-1} \right)^2.$$

Prema tome nejednačina (2.5.3) je dokazana. $\square$

*(Produžetak dokaza teoreme 2.5.2)* Sada ćemo dokazati da $(ii)$ sledi od (2.5.3). Još jednom sužavamo konusnu okolinu u pravcu $\xi_0$. Tako, neka je $\Gamma_2$ otvoreni konus čija adherencija $\overline{\Gamma_2} \subset \Gamma_1 \cup \{0\}$ i $\xi_0 \in \Gamma_2$. Neka je funkcija $\psi \in \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$ jednaka na 1 u neku okolinu tačke $x_0$. Možemo naći $r > 0$ tako da

$$\Gamma_2 \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : \ |\xi| \geq r\} \subset (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0,1)^d.$$

Za svaki $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$, definišemo okolinu $\Lambda_n = n + [0,1]^d$. Tada od (2.5.3) i nejednačine Pitrea,

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\xi\in\Gamma_2\\|\xi|\geq r}} \langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi &\leq C \sum_{n\in\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s} \int_{\Lambda_n} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C\int_{[0,1]^d} \sum_{n\in\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s}|\widehat{\psi f}(n+t)|^2 dt \\ &\leq C \sup_{t\in[0,1]^d} \sum_{n\in\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s}|\widehat{e_{-t}\psi f}(n)|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Prema tome, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$, čime je dokaz u jednom pravcu završen.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Analiza slična na onu koju smo primenili ranije, ali sa integralima umesto sumama, može se primeniti da se dokaže da $(x_0, \xi_0) \notin WF_s(f)$ povlači sledeću osobinu:

Postoje otvoreni konus $\Gamma$, konstanta $\varepsilon \in (0,1)$, tako da za svakom ograničenom skupu $B \subset \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$ je ispunjeno

$$\sup_{\psi\in B} \int_{\Gamma} \langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{\psi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{2.5.4}$$

Detalje ćemo izostaviti. Znači, pretpostavljamo da je ispunjeno (2.5.4). Neka je $\Gamma_1$ otvoreni konus koji sadrži $\xi_0$ tako da $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Tada, postoji neko $r > 0$ tako da

$$(\Gamma_1 + [0,1]^d) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : \ |\xi| \geq r\} \subset \Gamma.$$

Neka je $\phi \in \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0})$ takva da $\phi \equiv 1$ u nekoj okolini tačke $x_0$. Razmotrićemo merljivu funkciju $t : \Gamma \to [0,1]^d$. Ako u (2.5.4) uzmemo ograničeni skup

$$B = \{\psi_{j,t} \in \mathscr{D}(I_{\varepsilon,x_0}) : \ \psi_{j,t}(x) = x_j e^{-2\pi i x\cdot t(\xi)}\phi(x), \ \xi \in \Gamma \, , j = 1, \ldots, d\},$$

dobijamo da postoji konstanta $C > 0$ tako da

$$\int_{\Gamma} \langle\xi\rangle^{2s}|\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + t(\xi))|^2 d\xi < C. \tag{2.5.5}$$

Konstanta $C$ ne zavisi od $t$. Za svaki $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$, neka je $\Lambda_n$ jedinični kub

$$\Lambda_n = n + [0,1]^d = \prod_{j=1}^{d} [n_j, n_j + 1].$$

Može se primetiti da ako $|n| \geq r$, onda $\Lambda_n \subset \Gamma$. Važi da

$$\left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}^{\infty} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n)|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}^{\infty} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n)|^2 d\xi \right)^{1/2} \leq I_1^{1/2} + I_2^{1/2},$$

gde

$$I_1 := \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}^{\infty} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n) - \widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi$$

and

$$\begin{aligned} I_2 &:= \sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}^{\infty} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{|n| \leq r}^{\infty} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi + C' \int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Ostalo je pokazati da je integral $I_1$ konačan. Za dato $\theta > 0$ definišemo $t_\theta : \Gamma \to [0,1]^d$ kao

$$t_\theta(\xi) = \begin{cases} \theta(n - \xi) & , \text{ako } \xi \in \Lambda_n \text{ i } |\xi| \geq r, \\ 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

Sada ćemo iskoristiti (2.5.5). Pošto

$$|\widehat{\phi f}(\xi) - \widehat{\phi f}(n)|^2 \leq |n - \xi| \int_0^1 |\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + \theta(n - \xi))|^2 d\theta,$$

imamo

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \sum_{\substack{|n| \leq r \\ n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d}}^{\infty} \int_{\Lambda_n} \langle n \rangle^{2s} |\widehat{\phi f}(n) - \widehat{\phi f}(\xi)|^2 d\xi \\ & + C' \sup_{\theta \in [0,1]} \int_{\Gamma} \langle \xi \rangle^{2s} |\nabla(\widehat{\phi f})(\xi + t_\theta(\xi))|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Ovim je dokaz završen. $\square$

## 2.6 Različiti pristupi množenju distribucija

U [59] su navedeni glavni pravci za „rešavanje” problema množenja distribucija:

1) da se otkažemo nekog svojstva iz Primera 2.1.1 i da radimo tako što ćemo smestiti prostor distribucija u nekoj algebri ili

2) da definišemo proizvod distribucija na potprostorima prostora $\mathscr{D}'(\Omega)$. Prvi pristup dovodi do uopštene funkcionalne algebre. Ali termin množenje distribucija odnosi se pre svega na drugom postupku. Tu takođe se dobijaju različiti pristupi:

2)a. teorija množitelja (multiplier) (u kojoj množenje se posmatra kao neprekidno bilinearno preslikavanje na linearnim topološkim potprostorima iz $\mathscr{D}'$) i

2)b. metodi koji omogućavaju da se dobiju pojedini distribucioni proizvodi (bez zahtevanja globalne neprekidnosti operacije).

Teoriju množitelja možemo koristiti kod tipičnih neprekidnih multiplikativnih preslikavanja na Lebegovim prostorima:

$$\mathscr{L}^p(\Omega) \times \mathscr{L}^q(\Omega) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathscr{L}^1(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ili u prostorima Soboljeva $\mathscr{H}^s(\Omega)$ koji formiraju algebru za $s > \frac{n}{2}$ i možemo definisati proizvod

$$\mathscr{H}^s(\Omega) \times \mathscr{H}^{-s}(\Omega) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathscr{H}^{-s}(\Omega).$$

Drugi primer dobija se od konvolucione algebre $\mathscr{S}'_\Gamma(\mathbb{R}^d)$ temperiranih distribucija sa nosačem u konusu $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$. Inverzna slika $\mathscr{S}'_\Gamma(\mathbb{R}^d)$ u odnosu na Furijeovu transformaciju je algebra takozvanih retardiranih distribucija, na koju proizvod definisan formulom $fg = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))$, je sekvencijalno neprekidno bilinearno preslikavanje.

Individualni distribucioni proizvodi mogu se definisati nad nekim podskupovima $\mathscr{M}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega)$. Proizvod će biti bilinearan, komutativan i parcijalno asociativan – ako $(u, v) \in \mathscr{M}(\Omega)$ i $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, tada $(\varphi f, g) \in \mathscr{M}(\Omega), (f, \varphi g) \in \mathscr{M}(\Omega)$ i $\varphi fg = f\varphi g$. Ako su ispunjeni ovi uslovi, moguća je lokalizacija, t.j. proizvod je jednoznačno definisan pomoću njegovih restrikcija na otvorene okoline tačaka u $\Omega$. Takođe, dovoljno je definisati proizvode $(\varphi f)(\varphi f)$ za svaku $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ kako bi $fg$ bio opredeljen.

Postoje različite definicije za ovakve proizvode. Navodimo nekoliko od njih.

a) $\mathscr{M}_1 = \{(f,g) \in \mathscr{D}'(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega) : \text{sing supp}(f) \cap \text{sing supp}(g) = \emptyset\}$. Ovo je lokalizovana verzija proizvoda glatke funkcije sa distribucijom. Ovo je veliko ograničenje i postavlja se pitanje da li je za postojanje proizvoda dve distribucije uvek potrebno da njihovi singularni nosači budu disjunktni. Odgovor je negativan, t.j. proizvod dve distribucije postoji i kada njihovi singularni nosači nisu disjunktni, međutim treba postaviti neka ograničenja na takozvanim pravcima singularnosti.

b) $\mathscr{M}_2 = \{(f,g) \in \mathscr{D}'(\Omega)\mathscr{D}'(\Omega) : (\forall \varphi \in \mathscr{D}'(\Omega))$ postoji $\mathscr{S}'-$konvolucija $\mathcal{F}(\varphi f) * \mathcal{F}(\varphi g)\}$. Definicija konvolucije u $\mathscr{S}'$ je generalizacija konvolucije u $\mathscr{S}'_\Gamma$ u kojoj nije potrebno svojstvo nosača. Proizvod je lokalno definisan sa $fg = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))$. Proizvod retardiranih distribucija je specijalan slučaj ovog proizvoda kao i kriterium talasnog fronta Hermandera: Ako za $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, (x,\xi) \in WF(f)$ povlači $(x,-\xi) \notin WF(g)$, tada $(f,g) \in \mathscr{M}_2$.

c) $\mathscr{M}_3 = \{(f,g) \in \mathscr{D}'(\Omega)\mathscr{D}'(\Omega) : \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(f * \delta_\varepsilon)(g * \rho_\varepsilon)$ postoji za svaki par strogih delta-mreža $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}\}$;

d) $\mathscr{M}_4 = \{(f,g) \in \mathscr{D}'(\Omega)\mathscr{D}'(\Omega) : \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(f * \delta_\varepsilon)(g * \delta_\varepsilon)$ postoji za svaku model-delta-mrežu $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}\}$;

Ispunjene su stroge inkluzije $\mathscr{M}_i \subset \mathscr{M}_{i+1}, i \in \{1,2,3,4\}$.

Mi smo pokazali da je naš pristup ekvivalentan Hermanderovim i zato i on je sadržan u $\mathscr{M}_2$.

# Glava 3

# Teorija ultradistribucija - sekvencijalni pristup

## 3.1 Uvod

Ultradistribucije i distribucije imaju slične strukture pa prirodno se postavlja pitanje da li je, slično kao i kod distribucija, moguće da se ultradistribucije posmatraju kao granice regularnih funkcija ili preciznije kao klase ekvivalencije nizova glatkih funkcija. Međutim, realizacija teorije ultradistribucija koristeći sekvencijalni pristup, kojim se pokazuju unutrašnje veze između odgovarajućih nizova glatkih funkcija do sada nije bila urađena. U ovom radu naš cilj jeste da damo sekvencijalni pristup teoriji nekvazi-analitičkih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea [38]. Analogno sekvencijalnoj teoriji distribucija u [2], definišemo sekvencijalne ultadistribucije kraće nazvane $s$-ultadistribucije, ("$s$" stoji za sekvencijalne) kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova glatkih funkcija koji u ovom slučaju su definisane, pomoću ultradiferencijalnih operatora umesto pomoću diferencijalnih operatora kao kod običnih distribucija. Ovo je suštinska razlika i zahteva drugačije tehnike i je teža za dokazivanje: umesto sa polinomima moramo koristiti funkcije subeksponencijalnog rasta i da koristimo njhove specifične osobine. Kako bi dokazali da je sekvencijalni pristup ekvivalentan uobičajenom klasičnom pristupu teoriji ultradistribucija (kao kod Komatsua [38]-[41]), moramo poznavati unutrašnje strukturne osobine ultradistribucija, kao i temperiranih ultradistribucija (videti, [11]-[35], [45]-[65]); ekvivalencija ovih dva pristupa dokazaćemo pomoću Hermitovih razvoja i nekih strukturnih osobina temperiranih ultradistribucija.

Kako bi pojednostavili naše izlaganje, posmatraćemo samo Ževrejev niz oblika $(M_p) = (p!^t), p \in \mathbb{Z}_+$ za $t > 1$. Ovaj niz zadovoljava svakog od uslova koji su pretpostavljeni za opšti niz $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Prema tome, koristićemo uprošćenu notaciju $\mathscr{D}^{(t)}(\Omega)$ (resp. $\mathscr{D}^{\{t\}}(\Omega)$) za prostore test funkcija $\mathscr{D}^{(M_p)}(\Omega)$ (resp.$\mathscr{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$) na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ i $\mathscr{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathscr{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$) za prostore test funkcija $\mathscr{S}^{(M_p)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathscr{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}^d)$). Ovo se odnosi i na njhovim dualima, t.j $\mathscr{D}'^{(t)}(\Omega)$, $\mathscr{D}'^{\{t\}}(\Omega)$– prostori ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea na skupu $\Omega$ i $\mathscr{S}'^{(t)}(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{S}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$– prostori temperiranih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea na $\mathbb{R}^d$, respektivno. Indeks $*$ uobičajeno koristimo za označavanje odgovarajućih prostora i klase tipa Berlinga i tipa Rumijea, t.j. $\mathscr{D}^*(\Omega)$, $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{D}'^*(\Omega)$, $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ su zajednički simboli za respektivne parove prostora navedenih ranije u tekstu. Ovi prostori su istraživani u [11], [35], [38], [43], [65] kao i u mnogim drugim radovima.

Naglašavamo da postoji i drugi pristup teoriji ultradistribucija uveden od Vogta (D. Vogt), Meisea (R. Meise) i njihovih suradnika, za koji postoji obimna literatura u kojoj su razrađene i mnoge primene; navodimo samo nekih od izvora i njihove reference: [7], [8], [62], [102].

Naš sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija je sličan onome koji je izložen u [2] za distribucije. Počinjemo definicijom za specijalni tip fundamentalnih nizova glatkih funkcija i odgovarajuće klase ekvivalencije nazvane $s$-ultradistribucije koji su elementi prostora kojeg označavamo sa $\mathscr{U}^*(\Omega)$. Ovo je urađeno u delovima 3.2 i 3.3, zajedno sa analizom operacija na $s$-ultradistribucijama, struktura konvergencije u $\mathscr{U}^*(\Omega)$ i dejstvo $s$-ultradistribucija na test funkcije koji pripadaju u $\mathscr{D}^*(\Omega)$. U delu 3.4 uvodimo i proučavamo prostore $\mathscr{T}^*$ i $\widetilde{\mathscr{T}}^*$ kojih nazivamo $t$- i $\widetilde{t}$-ultradistribucije, respektivno. Opet analiziramo njihovu strukturu, konvergenciju u njima i proučavamo dejstvo ovih temperiranih ultradistribucija na elemente odgovarajućih prostora test funkcija. Dobro je poznato (videti [27] i dr.) da postoji topološki izomorfizam između prostora $\mathbf{s}^*$ i $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, gde $\mathbf{s}^*$ je Keteov (Köthe) ešelon prostor nizova sub-eksponencijalnog rasta. Koristeći ovaj fakt dokazujemo u delu 3.5 da postoji sekvencijalni topološki izomorfizam između $\mathscr{T}'^*$ i $\mathscr{T}^*$ i prostora $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$. Konačno, koristeći rezultate iz dela 3.5, dokazujemo u delu 3.6 egzistenciju sekvencijalnog topološkog izomorfizma između prostora $\mathscr{U}^*(\Omega)$ i $\mathscr{D}'^*(\Omega)$.

### 3.1.1 Preliminarni rezultati iz teorije ultradistribucija

Skupovi pozitivnih celih brojeva, nenegativnih celih brojeva, realnih i kompleksnih brojeva označavaju se sa $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, respektivno.

U ovom delu koriste se iste oznake koje smo naveli na početku. Naglašavamo da za operatore diferenciranja važi

$$D^\alpha = D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}, \quad \text{gde} \;\; D_j^{\alpha_j} := (-i\partial/\partial x_j)^{\alpha_j} \;\; \text{za} \;\; j = 1, \ldots, d.$$

Za Furijeovu transformaciju od $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ u ovom delu koristimo oznake:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}\varphi = \widehat{\varphi} := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\langle x, \cdot \rangle}\, dx.$$

Navodimo nekoliko osobina iz [38]. Fiksiramo $t > 1$ i razmatramo *asociranu funkciju*, koja odgovara nizu Ževreja $(p!^t)_{p\in\mathbb{Z}_+}$ za dato $t$, definisanu formulom

$$M(\rho) := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \log_+ \frac{\rho^p}{p!^t} = e^{k\rho^{1/t}} \;\; \text{za} \; \rho > 0,$$

gde je $k > 0$ odgovarajuća konstanta. Sa $\mathcal{R}$ označavamo skup svih nizova $(r_p)$ pozitivnih brojeva koji strogo rastu ka beskonačnosti. Naročito, za $(r_p) \in \mathcal{R}$ definišemo niz $(N_p)$ sa

$$N_0 := 1; \qquad N_p := p!^t R_p, \;\; \text{where} \;\; R_p := \prod_{j=1}^{p} r_j, \;\; \text{za} \;\; p \in \mathbb{N}. \tag{3.1.1}$$

$(r_p)$-*asocirana funkcija*, koja odgovara datom nizu $(r_p) \in \mathcal{R}$, je funkcija:

$$N_{(r_p)}(\rho) := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \log_+ \frac{\rho^p}{N_p}, \qquad 0 < \rho < \infty,$$

gde niz brojeva $(N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ je definisan u (3.1.1). Za svaki $(r_p) \in \mathcal{R}$ i za svako $k > 0$ postoji $\rho_0 > 0$ tako da

$$N_{(r_p)}(\rho) \leq e^{k\rho^{1/t}} \qquad \text{za} \; \rho > \rho_0,$$

(videti [38]).

Neka je $K \subset\subset \Omega$ and $h > 0$. Navešćemo definicije nekih od prostora test funkcija [38]:

$$\mathscr{E}^{t,h}(K) := \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)\colon \; P_{h,K}(\varphi) := \sup_{x\in K, \alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|} \alpha!^t} < \infty\};$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_K^{t,h} &:= \mathscr{E}^{t,h}(K) \cap \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)\colon\ \operatorname{supp}\varphi \subset K\};\\
\mathscr{D}_K^{(t)} &:= \varprojlim_{h\to 0} \mathscr{D}_K^{t,h}; \qquad \mathscr{D}^{(t)}(\Omega) := \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathscr{D}_K^{(t)};\\
\mathscr{D}_K^{\{t\}} &:= \varinjlim_{h\to\infty} \mathscr{D}_K^{t,h}; \qquad \mathscr{D}^{\{t\}}(\Omega) := \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathscr{D}_K^{\{t\}}.
\end{aligned}$$

Kako smo i ranije naveli, koristićemo zajednički simbol $\mathscr{D}^*(\Omega)$ za prostorima $\mathscr{D}^{(t)}(\Omega)$ i $\mathscr{D}^{\{t\}}(\Omega)$ , a $\mathscr{D}'^*(\Omega)$ za njihovim dualima. Prostori Geljfanda-Šilova $\mathscr{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, definisani su u [11] i oni su invarijantni u odnosu na Furijeovu transformaciju; dati su sa

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_h^t(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\colon\ (\exists C>0)\ (\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d)\ \ \frac{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_2}{h^{|\alpha+\beta|}\alpha!^t\beta!^t} \le C\};\\
\mathscr{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d) := \varprojlim_{h\to 0} \mathscr{S}_h^t(\mathbb{R}^d); \qquad \mathscr{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d) := \varinjlim_{h\to\infty} \mathscr{S}_h^t(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

Primetimo da je prostor $\mathscr{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ netrivijalan ako $t > 1/2$, dok $\mathscr{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ je netrivijalan ako $t \ge 1/2$. Označavamo oba prostora $\mathscr{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathscr{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ sa $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, a njihovih duala sa $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.

Važi

$$\mathscr{D}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{D}'^*(\mathbb{R}^d),$$

gde simbol $\hookrightarrow$ označava da je identično preslikavanje neprekidno i gusto ulaganje.

Generalizacija delta-niza (delta-mreže) iz 1.1.5 dobija se ako uzmemo da funkcija-model pripada u $\mathscr{D}^*(\mathbb{R}^d)$.

### 3.1.2 Ultradiferencijalni operatori

Navešćemo definicije i neke rezultate koji se odnose na ultradiferencijalnim operatorima iz [38]-[43]. Formalni izraz $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha D^\alpha$ $(a_\alpha \in \mathbb{C})$, koji odgovara analitičkoj funkciji $P(z) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha z^\alpha$ $(z \in \mathbb{C}^d)$, naziva se *ultradiferentijalni operator klase Berlinga* $(p!^t)$ (resp. *klase Rumijea* $\{p!^t\}$), ako on zadovoljava uslov:

$$(\exists h>0)\big(\text{resp. } (\forall h>0)\big)(\exists C>0)(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)(|a_\alpha| \le C\frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!^t}).$$

U slučaju Rumijea možemo koristiti sledeći ekvivalentni izraz:

$$(\exists (r_p) \in \mathcal{R}\ , \exists C > 0)\ (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_\alpha| \,\leq\, \frac{C}{(\alpha!)^t R_{|\alpha|}}\,,$$

gde je $R_{|\alpha|}$ definisana u (3.1.1) i $t > 1$ je fiksiran u nastavku rada. Koristićemo termin *ultradiferencijalni operator klase* $*$ za oba slučaja - Berlingovog i Rumijeovog.

Ako je $P(D)$ ultradiferencijalni operator klase Berlinga (respektivno, klase Rumijea), tada funkcija $P(z) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha, z \in \mathbb{C}^d$, prema [38, Propozicija 4.5], zadovoljava ograničenja:

$$(\exists h > 0)\ \big(\text{resp.}\,(\forall h > 0)\big)\ (\exists C > 0)\ (\forall z \in \mathbb{C}^d) \quad |P(z)| \,\leq\, Ce^{h|z|^{1/t}};$$

u slučaju Rumijea, ograničenja mogu da se predstave u sledećem ekvivalentnom obliku: Postoje $(r_p) \in \mathcal{R}$ i $C > 0$ tako da

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^d) \quad |P(\xi)| \,\leq\, Ce^{c(|\xi|)^{1/t}},$$

gde $c$ je *subordinirana funkcija* datog niza $(r_p) \in \mathcal{R}$, t.j. rastuća funkcija na $[0, \infty)$ za koju $c(0) = 0$ i $c(\rho)/\rho \to 0$ kada $\rho \to \infty$ i koja je pridružena nizu $(r_p)$ pomoću identiteta:

$$M(c(\rho)) \,=\, N_{(r_p)}(\rho), \qquad \text{za } \rho > 0,$$

gde je $N_{(r_p)}$ $(r_p)$-asocirana funkcija (videti [38]).

Sa $\mathcal{P}^{(t)}$ (resp. $\mathcal{P}^{\{t\}}$) označavamo klasu ultradiferencijalnih operatora $P_r(D)$ tipa Berlinga (resp. $P_{(r_p)}(D), (r_p) \in \mathcal{R}$ tipa Rumijea) koji imaju oblik:

$$P_r(D) = (1+D_1^2+\ldots+D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty} \big[1+\frac{D_1^2+\ldots+D_d^2}{r^2p^{2t}}\big] \quad \big(= \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p\big) \tag{3.1.2}$$

(resp.,

$$P_{(r_p)}(D) = (1+D_1^2+\ldots+D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty} \left(1+\frac{D_1^2+\ldots+D_d^2}{r_p^2p^{2t}}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p \tag{3.1.3}$$

gde $r > 0$ (resp. $(r_p) \in \mathcal{R}$) i $l \geq 0$. Smenom $D_j$ sa $\xi_j$ u (3.1.2) i (3.1.3) dobijamo *ultra-polinome* $P_r(\xi)$ tipa Berlinga (resp. $P_{(r_p)}(\xi)$ tipa Rumijea) koji odgovaraju ultradiferencijalnim operatorima $P_r(D)$ (resp. $P_{(r_p)}(D)$). Oni se mogu opisati na sledeći način (videti [38]):

Ultra-polinomi tipa Berlinga su subeksponencijalnog rasta, t.j. postoje konstante $C_1, C_2, C > 0$ i $h_1, h_2, h > 0$ tako da

$$C_1 e^{h_1|\xi|^{1/t}} \leq |P_r(\xi)| \leq C_2 e^{h_2|\xi|^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1.4}$$

i

$$|a_p| \leq C \frac{h^p}{p!^t}, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

Deskripcija ultra-polinoma u slučaju Rumijea je teži. Može se dokazati, slično kao u slučaju Berlinga, da za dati niz $(r_p) \in \mathcal{R}$ i njegovoj subordiniranoj funkciji $c$ postoji konstanta $C > 0$ tako da

$$C e^{c(|\xi|)^{1/t}} \leq |P_{(r_p)}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1.5}$$

Kako bi dobili odgovarajuće gornje ograničenje moramo naći niz $(r_{0,p}) \in \mathcal{R}$ i njegovu subordiniranu funkciju $c_0$ tako da nejednačina

$$(1 + |\xi|^2)^l |P_{(r_p)}(\xi)| \leq C_0 e^{c_0(|\xi|)^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1.6}$$

važi za neku konstantu $C_0 > 0$ i za svako $l \geq 0$. Na primer, ako $r_p = p^\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), tada $c(|\xi|) = h_0|\xi|^{t/(t+\varepsilon)}$ za neko pogodno izabrano $h_0 > 0$ i za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. U ovom slučaju ograničenja su očigledna. U opštom slučaju ćemo koristiti sledeću važnu osobinu subordiniranih funkcija koja je posledica Leme 3.12 (videti i Lemu 3.10iz [38]).

Neka je $c$ proizvoljna subordinirana funkcija i neka $\widetilde{c} := 2c$. Postoji niz $(r_p^0) \in \mathcal{R}$ tako da $(r_p^0)$-asocirana funkcija $N_{(r_p^0)}$ i subordinirana funkcija $c_0$ koji odgovaraju nizu $(r_p^0)$ zadovoljavaju nejednačinu:

$$M(\widetilde{c}(\rho)) \leq N_{(r_p^0)}(\rho) = M(c_0(\rho)), \quad \rho > 0,$$

Prema tome,

$$c_0(\rho) \geq \widetilde{c}(\rho) = 2c(\rho), \quad \rho > 0.$$

Gornje primedbe mogu da se formuliraju u sledeću lemu:

**Lema 3.1.1.** *Za proizvoljnu subordiniranu funkciju c, koja odgovara nekom nizu* $(r_p) \in \mathcal{R}$, *i* $h > 0$ *postoji niz* $(r_p^0) \in \mathcal{R}$ *i njegova subordinirana funkcija* $c_0$ *tako da*

$$c_0(\rho) \geq h\, c(\rho), \quad \rho > 0.$$

*Naročito, za datu subordiniranu funkciju c postoji druga subordinirana funkcija* $c_0$ *(obe su pridružene odgovarajućim nizovima iz* $\mathcal{R}$*) tako da*

$$c_0(\rho) \geq c(2\rho)$$

*za svako* $\rho > 0$.

U delu 3.4.2 ćemo koristiti sledeću lemu.

**Lema 3.1.2.** (a) *Ako je* $P_r \in \mathcal{P}^{(t)}$ *(resp.* $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$*), tada postoje* $r_0 > 0$ *(resp.* $(r_p^0) \in \mathcal{R}$*),* $C > 0$ *i* $\varepsilon > 0$ *tako da*

$$|D^\alpha P_r(x)| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\, e^{r_0|x|^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

$$(resp.\ |D^\alpha P_{(r_p)}(x)| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\, e^{c_{(r_p^0)}(|x|)^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d),$$

*gde je* $c_{(r_p^0)}(\rho)$, $\rho > 0$, *subordinirana funkcija koja odgovara nizu* $(r_p^0) \in \mathcal{R}$.

(b) *Ako* $P_{\widetilde{r}} \in \mathcal{P}^{(t)}$ *(resp.* $P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$*), tada postoje* $\widetilde{r}_0 > 0$ *(resp.* $(\widetilde{r}_p^0) \in \mathcal{R}$*),* $C > 0$ *i* $\varepsilon > 0$ *tako da*

$$|D^\alpha (1/P_r(x))| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\, e^{-\widetilde{r}_0|x|^{1/t}}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

$$(resp.\ \left|D^\alpha \left(1/P_{(\widetilde{r}_p)}(x)\right)\right| \leq \frac{C\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}\, e^{-c_{(\widetilde{r}_p^0)}(|x|)^{1/t}}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d),$$

*gde je* $c_{(\widetilde{r}_p^0)}$ *subordinirana funkcija odgovarajuća nizu* $(\widetilde{r}_p^0)$.

We will use Koristićemo simbol $\mathcal{P}^*$ kao zajedničku oznaku za klase ultradiferencijalnih operatora $\mathcal{P}^{(t)}$ tipa Berlinga (resp. $\mathcal{P}^{\{t\}}$ tipa Rumijea) uvedenih ranije. Simbolom $\mathcal{P}^{2*}$ označavamo prostor $t$-ultradistribucija oba tipa. Odgovarajućih prostora ultradiferencijabilnih funkcija označavaćemo simbolima $\mathcal{P}_u^*$ (resp. $\mathcal{P}_u^{2*}$). Ova notacija izgleda nam olakšava da razdvojimo različite upotrebe slova $P$: $P(D)$, $P(x)$ ili $P(\xi)$. U nastavku, kako bi pojednostavili izlaganje, posmatraćemo ultradiferencijalne operatore oblika (3.1.2) i (3.1.3), ali u nekim dokazima koristićemo njihov opšti oblik.

Sa $\mu_\beta$ označavamo sledeći operator koji deluje na merljivoj funkciji $G$:

$$(\mu_\beta G)(\xi) := (i\xi)^\beta G(\xi) \qquad \text{za } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ i } \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Primetimo da $\mu_0 G = G$. U nastavku ćemo koristiti sledeću tvrdnju:

**Propozicija 3.1.3.** *Za svako $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $q \in [1,\infty]$ i $P_r(D) \in \mathcal{P}^{(t)}$ gde je $r > 0$ (resp. $P_{(r_p)}(D) \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde je $(r_p) \in \mathcal{R}$) postoji $P_{\widetilde{r}}(D) \in \mathcal{P}^{(t)}$ gde je $\widetilde{r} > r$ (resp. $P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde je $(\widetilde{r}_p) \in \mathcal{R}$, $\lim_{p\to\infty} r_p/\widetilde{r}_p = 0$) tako da*

$$\mu_\beta \frac{P_r}{P_{\widetilde{r}}} \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d) \quad i \ \mathcal{F}^{-1}\big(\mu_\beta \frac{P_r}{P_{\widetilde{r}}}\big) \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d) \tag{3.1.7}$$
$$\left(resp.\ \mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\widetilde{r}_p)}} \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d) \ \ i \ \ \mathcal{F}^{-1}\big(\mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\widetilde{r}_p)}}\big) \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^d)\right)$$

*Analogno, za $\mathcal{P}_u^{2*}$ umesto $\mathcal{P}_u^*$, važe sledeće relacije:*

$$\left(\frac{P_r(2\alpha+1)}{P_{\widetilde{r}}(2\alpha+1)}\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \in l^q \qquad \left(resp.\ \left(\frac{P_{(r_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\widetilde{r}_p)}(2\alpha+1)}\right)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \in l^q\right), \tag{3.1.8}$$

*gde*

$$P(2\alpha+1) := \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \prod_{i=1}^{d} (2\alpha_i+1)^{k_i}, \quad za\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Sledeće dobro poznate navode ćemo takođe koristiti u nastavku; njihovi dokazi mogu se naći na mnogo mesta, na primer u [11, 65].

**Lema 3.1.4.** (*a*) *Glatka funkcija $\varphi$ na $\mathbb{R}^d$ pripada u $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ imamo*

$$\|P_1 P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

(*b*) *Ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}^*} \varphi_0$ kada $n \to \infty$, tada za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ važi*

$$P_1 P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}^*} P_1 P(-D)\varphi_0 \qquad kada\ n \to \infty.$$

(*c*) *Ako za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}^*} \varphi_0$ kada $n \to \infty$, tada za svaki $P \in \mathcal{P}^*$ imamo*

$$P(H)\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}^*} P(H)\varphi_0 \qquad kada\ n \to \infty.$$

## 3.2 Fundamentalni nizovi $s$-ultradistribucija

Švarcove distribucije u sekvencijalnom pristupu prikazanom u [2] su definisane kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova glatkih funkcija definisanih pomoću diferencijalnih operatora (izvoda) konačnog reda. Na sličan način uvodimo sekvencijalne ili $s$-ultradistribucije tipa Berlinga i Rumijea. Razlika je u tome da novi fundamentalni nizovi su definisani upotrebom ultradiferencijalnih operatora $P_r(D)$ i $P_{(r_p)}(D)$, respektivno, umesto diferencijalnih operatora konačnog reda.

Ako $P \in \mathcal{P}^*$ i $F$ je integrabilna funkcija sa kompaktnim nosačem, tada je $P(z)\mathcal{F}(F)(z)$ $(z \in \mathbb{C}^d)$ cela funkcija subeksponencijalnog rasta na $\mathbb{R}^d$. Ako inverzna Furijeova transformacija $\mathcal{F}^{-1}(P\widehat{F})$ je lokalno integrabilna funkcija, tada definišemo

$$P(D)F(x) := \mathcal{F}^{-1}(P\widehat{F})(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{3.2.1}$$

formalno dejstvo ultradiferencijalnog operatora $P(D)$ na glatkoj funkciji sa kompaktnim nosačem. Ako je $F$ glatka funkcija sa kompaktnim nosačem za koju

$$\operatorname{supp} F \subset K_1 \subset\subset \Omega$$

i $P \in \mathcal{P}^*$ ima oblik

$$P(D) = \lim_{k\to\infty} P_k(D),$$

gde

$$P_k(D) := \sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha D^\alpha,$$

i pretpostavljamo egzistenciju leve strane jednačine (3.2.1) u sledećem smislu:

$$P(D)F(x) := \lim_{k\to\infty} P_k(D)F(x), \quad x \in K, \tag{3.2.2}$$

tada granica u (3.2.2) postoji i ona je glatka funkcija na $K$. U ovom slučaju limes definira $f(x) = P(D)F(x)$ za $x \in K$ i daje smislu izrazu (3.2.3) dole.

**Definicija 3.2.1.** *Niz glatkih funkcija $(f_n)$ definisanim na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ naziva se $s$-*fundamentalan *tipa $*$, (tipa Berlinga ili Rumijea, respektivno) na $\Omega$, ako za svako $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje ultradiferencijalni operator $P(D) \in \mathcal{P}^*$, niz glatkih funkcija $(F_n)$ na $\Omega$ i neprekidna funkcija $F_0$ na $\Omega$, tako da*

$$f_n = P(D)F_n \;\text{ na } K \;\; (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} F_n \subset K_1 \;\; (n \in \mathbb{N}_0) \tag{3.2.3}$$

$$i \;\; F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0 \;\; kada \;\; n \to \infty.$$

Jednakost (3.2.3) se podrazumeva u smislu postojanja granice (3.2.2). U nastavku, za dati $K \subset\subset \Omega$ uvek ćemo uzimati skup $K_1 \subset\subset \Omega$ za koji $K \subset\subset K_1^\circ$ koji je dovoljno blizak skupu $K$, bez da se to posebno naglašava (moguće je pokazati, uzimajući prikladnu funkciju odsecanja, da definicija ne zavisi od izbora skupa $K_1$).

*Primedba* 3.2.2. $1^\circ$ U (3.2.3) moguće je posmatrati svaki ultradiferencijalni operator klase $*$, ne samo one koji pripadaju $\mathcal{P}^*$, što daje opštiji oblik definicije. Kako obe formulacije su ekvivalentne, koristićemo gore navedenu radi jednostavnosti.

$2^\circ$ Neka $\Omega_1,\ \Omega$ su otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^d$ tako da $\Omega_1 \subset \Omega$. Ako je niz $(f_n)$ je $s$-fundamentalan tipa $*$ u $\Omega$, tada je on $s$-fundamentalan tipa $*$ u $\Omega_1$.

$3^\circ$ Neka je $(f_n)$ niz glatkih funkcija u $\Omega$. Ako za svaki otvoreni skup $\Omega_0 \subset \Omega$ niz $(f_n|\Omega_0)$ je $s$-fundamentalan u $\Omega_0$, tada $(f_n)$ je $s$-fundamentalan u $\Omega$.

**Definicija 3.2.3.** *Neka su $(f_n)$ i $(g_n)$ $s$-fundamentalni nizovi na otvorenom skupu $\Omega$. Pišemo*

$$(f_n) \sim (g_n)$$

*ako za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$, postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i nizovi $(F_n)$, $(G_n)$ glatkih funkcija na $\Omega$ tako da*

$$\begin{aligned} f_n = P(D)F_n, \;\; u\, K, \qquad & g_n = P(D)G_n \;\; u\; K \;\; (n \in \mathbb{Z}_+), \\ \operatorname{supp} F_n \subset K_1, \qquad & \operatorname{supp} G_n \subset K_1 \;\; (n \in \mathbb{Z}_+), \\ i \qquad F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F, \qquad & G_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F, kada \;\; n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Koristićemo oznaku

$$F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)}\!\!\!\!\longleftarrow G_n, \qquad \text{kada } n \to \infty$$

kako bi označili da nizovi $(F_n)$ i $(G_n)$ konvergiraju u $\mathscr{C}(K)$ prema istoj neprekidnoj funkciji $H$ na $\Omega$ (jasno je da $\operatorname{supp} F, \operatorname{supp} G \subset K_1$).

Od Definicije 3.2.3 dobija se da

*Primedba* 3.2.4. Ako su $(f_n)$ i $(g_n)$ $s$-fundamentalni nizovi u $\Omega$, tada oni su u relaciji $(f_n) \sim (g_n)$ ako i samo ako niz $f_1$, $g_1$, $f_2$, $g_2$, $f_3$, $g_3$, $\ldots$ je $s$-fundamentalan u $\Omega$.

Jasno je da je relacija $\sim$ refleksivna i simetrična. Za dokaz njene tranzitivnosti dokazaćemo nekoliko pomoćnih propozicija koje ćemo koristiti u nastavku.

**Propozicija 3.2.5.** *Fiksirajmo $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$. Pretpostavimo da $(f_n)$ zadovoljava Definiciju 3.2.1 u slučaju Rumijea, t.j. $f_n = P_{(r_p)}(D)F_n$ na $K$, $\operatorname{supp} F_n \subset K_1$ za $n \in \mathbb{N}_0$ and $F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0$ kada $n \to \infty$ za niz $(F_n)$ glatkih funkcija i neprekidnu funkciju $F_0$ na $\Omega$. Tada postoje $P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, gde $(\widetilde{r}_p) \in \mathcal{R}$ sa $r_p/\widetilde{r}_p \downarrow 0$ kada $p \to \infty$ i $\mathcal{F}^{-1}\left(P_{(r_p)}/P_{(\widetilde{r}_p)}\right) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d)$, glatke funkcije $\widetilde{F}_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ i neprekidna funkcija $\widetilde{F}_0$ na $\Omega$ tako da*

$$\begin{aligned} & f_n = P_{(\widetilde{r}_p)}(D)\widetilde{F}_n \ \ \text{na}\, K \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} \widetilde{F}_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0) \\ & i \ \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} \widetilde{F}_0 \ \ \text{kada}\, n \to \infty. \end{aligned}$$

*Iskaz je tačan i u slučaju Berlinga (sa odgovarajućim oznakama).*

**Propozicija 3.2.6.** *Ako za proizvoljno $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije $F_n$ $(n \in \mathbb{N})$ i neprekidna funkcija $F_0$ na $\Omega$ sa $\operatorname{supp} F_n \subset K_1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ tako da*

$$F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0 \ \ i \ P(D)F_n(x) \to 0 \ \ za \ x \in K \ \ kada \ n \to \infty,$$

*tada $F_0 = 0$ na $\Omega$.*

*Naročito, ako je $F$ glatka funkcija na $\Omega$ i $P(D)F(x) = 0$ za $x \in \Omega$, tada $F = 0$ na $\Omega$.*

**Propozicija 3.2.7.** *Fiksirajmo $K, K_1 \subset\subset \Omega$ tako da $K \subset\subset K_1^\circ$. Pretpostavimo da, za nizove $(r_p), (\widetilde{r}_p) \in \mathcal{R}$, glatkih funkcija $F_n$, $\widetilde{F}_n$ na $\Omega$ $(n \in \mathbb{N})$ i neprekidne funkcije $F_0$, $\widetilde{F}_0$ na $\Omega$, važi*

$$\begin{aligned} & f_n = P_{(r_p)}(D)F_n \ \ \text{na}\, K \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp}\ F_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0), \\ & F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0 \ \ \text{kada}\, n \to \infty \end{aligned}$$

*i*

$$\begin{aligned} & f_n(x) = P_{(\widetilde{r}_p)}(D)\,\widetilde{F}_n \ \ \text{na}\, K \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp}\ \widetilde{F}_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0), \\ & \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} \widetilde{F}_0 \ \ \text{kada}\, n \to \infty. \end{aligned}$$

*Tada postoje niz* $(\overline{r}_p) \in \mathscr{R}$, *za koji* $\frac{r_p}{\overline{r}_p} \downarrow 0$ *i* $\frac{\widetilde{r}_p}{\overline{r}_p} \downarrow 0$ *kada* $p \to \infty$ *tako da*

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{P_{(r_p)}}{P_{(\overline{r}_p)}}\Big),\ \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{P_{(\widetilde{r}_p)}}{P_{(\overline{r}_p)}}\Big)\ \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d), \tag{3.2.5}$$

*i nizovi* $(F_{n,1})$, $(F_{n,2})$ *glatkih funkcija i neprekidne funkcije* $F_{0,1}$, $F_{0,2}$ *na* $\Omega$, *sa* $\operatorname{supp} F_{n,1}$, $\operatorname{supp} F_{n,2} \subset K_1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, *tako da*

$$f_n = P_{(\overline{r}_p)}(D)F_{n,j} \ \text{ na } K \ \ (n \in \mathbb{N}), \qquad F_{n,j} \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_{0,j} \ \text{ kada } \ n \to \infty \tag{3.2.6}$$

*za* $j = 1, 2$. *Štaviše* $F_{0,1} = F_{0,2}$ *na* $\Omega$.

*Isto važi i u slučaj Berlinga (sa odgovarajućom notacijom).*

**Propozicija 3.2.8.** *Relacija* $\sim$ *uvedena u Definiciji 3.2.3 je tranzitivna.*

### 3.2.1 Sekvencijalne ultradistribucije

**Definicija 3.2.9.** *Neka je* $(f_n)$ *s-fundamentalan niz (tipa* $*$*) u otvorenom skupu* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. *Klasa ekvivalencije* $[f_n]$ *svih s-fundamentalnih nizova (tipa* $*$*) ekvivalentnim sa* $(f_n)$ *u odnosu na relaciju* $\sim$ *naziva se sekvencijalna ultradistribucija (tipa* $*$*) ili kratko s-ultradistribucija (tipa* $*$*) i označava se*

$$f := [f_n],$$

*gde* $(f_n)$ *je neki predstavnik klase ekvivalencije. Skup svih s-ultradistribucija (tipa* $*$*) na datom otvorenom skupu* $\Omega$ *u* $\mathbb{R}^d$ *označava se sa* $\mathscr{U}^*(\Omega)$.

*Primedba* 3.2.10. 1° Koristeći Propoziciju 3.2.6, dobijamo da

$$f = [f_n] = 0 \text{ na } \Omega \text{ za } f \in \mathscr{U}^*(\Omega),$$

ako za proizvoljno $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoji niz $(F_n)$ glatkih funkcija na $\Omega$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da

$$f_n = P(D)F_n \ \text{ na } K \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} F_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N})$$
$$\text{i } \ F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} 0 \ \text{ kada } n \to \infty.$$

2° Neka je $f \in \mathscr{U}^*(\Omega)$. Ako $f = 0$ na $\Omega_1$ za svako $\Omega_1 \subset \Omega$, tada $f = 0$ na $\Omega$.

**Definicija 3.2.11.** Nosač $s$-ultradistribucije $f = [f_n] \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ *je komplement unije svih otvorenih skupova na kojih je* $f = 0$. *Kažemo da s-ultradistribucija* $f = [f_n]$ *ili s-fundamentalan niz* $(f_n)$ *tipa* $*$ *je sa kompaktnim nosačem ako postoji* $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ *tako da* $\operatorname{supp} f_n \subset K$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Tada pišemo* $\operatorname{supp} f \subset K$ *ili* $\operatorname{supp}(f_n) \subset K$. *U ovom slučaju postoji niz glatkih funkcija* $(F_n)$, *neprekidna funkcija* $F_0$, *ultradiferencijalni operator* $P \in \mathcal{P}^*$ *i* $K_1 \subset\subset \Omega$ *tako da*

$$f_n(x) = P(D)F_n(x) \ \ na\, \mathbb{R}^d \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} F_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$$
$$i \ \ F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0 \ \ kada\ n \to \infty.$$

**Primer 3.2.12.** *Neka je* $F$ *neprekidna funkcija sa kompaktnim nosačem u* $\mathbb{R}^d$, *t.j.* $f \equiv 0$ *van kompaktnog skupa* $K$, $(\delta_n)$ *je delta niz u* $\mathscr{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ *i neka* $F_n := F * \delta_n$ *za* $n \in \mathbb{N}$. *Tada* $(F_n)$ *je s-fundamentalan niz tipa* $*$ *na* $\mathbb{R}^d$.

**Primer 3.2.13.** *Neka je* $(f_n)$ *s-fundamentalan niz tipa* $*$ *na* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *i* $(K_n)$ *je rastući niz kompaktnih skupova tako da* $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ *za* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Stavimo*

$$\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} K_n.$$

*Definišemo otvorene skupove*

$$\Omega_n := \{x \in \Omega\colon\ d(x, \partial\Omega) > 1/n\}, \quad \Omega_{n,n} := \{x \in \Omega_n\colon\ d(x, \partial\Omega_n) > 1/n\}$$

*i funkcije* $\kappa_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ *tako da*

$$\kappa_n(x) = \begin{cases} 1, & \textit{if } x \in \Omega_{n,n}, \\ 0, & \textit{if } x \in \Omega_n^c, \end{cases}$$

*za* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Tada niz* $(\widetilde{f_n})$, *gde*

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} ((\kappa_n f_n) * \delta_n)(x), & \textit{if } x \in \Omega_n, \\ 0, & \textit{if } x \in \Omega_n^c, \end{cases}$$

*je s-fundamentalan tipa* $*$ *na* $\Omega$ *i* $(f_n) \sim (\widetilde{f_n})$.

**Primer 3.2.14.** *Neka je* $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *za neki otvoreni skup* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, *neka su* $\Omega_n$, $\Omega_{n,n}$ *i* $\kappa_n$ *kao u primeru 3.2.13 i neka je* $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$. *Stavimo*

$$F_n(x) := \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\big(\widehat{f_n}/P_{(r_p)}\big)(x), & ako\ x \in \Omega, \\ 0, & ako\ x \in \Omega_n^c, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

*za $n \in \mathbb{Z}_+$, gde*

$$f_n := (\kappa_n f) * \delta_n = P_{(r_p)}(D)F_n$$

*i $P_{(r_p)}$ označava u (3.2.7) funkciju koja odgovara ultradiferencijalnom operatoru $P_{(r_p)}$. Kako $\widehat{\kappa_n f}$, za svako $n \in \mathbb{Z}_+$, je ograničena polinomom, sledi iz (3.1.6) da je $(f_n)$ s-fundamentalan niz tipa Rumijea na $\Omega$, t.j. $[f_n] \in \mathscr{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Slično je moguće prikazati $f$ kao elemenat iz $\mathscr{U}^{(t)}(\Omega)$ pomoću $P_r(D)$ umesto $P_{(r_p)}(D)$.*

*Primedba* 3.2.15. Ako je $(f_n)$ $s$-fundamentalan niz tipa $*$ u smislu Definicije 3.2.1, tada $F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0$ kada $n \to \infty$ za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$. Primeri 3.2.12 i 3.2.14 pokazuju da svakog $s$-fundamentalanog niza $(f_n)$ za koga važi (3.2.3) moguće je identifikovati sa formalnom reprezentacijom

$$f = P(D)F_0$$

na $K$, jer iz opšte teorije ultradistribucija znamo da za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$ i neprekidna funkcija $F_0 \in \mathscr{C}(\Omega)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, tako da

$$f = P(D)F_0 \ \text{ na } K \quad \text{i} \quad \operatorname{supp} F_0 \subset K_1.$$

Ovo biće potvrđeno sa (3.3.3).

### 3.2.2 Operacije sa $s$-ultradistribucijama

Uvodimo operacije sabiranja i množenja sa skalarom. Neka su $f = [f_n] = [f_n], g = [g_n] \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, za nekih $s$-fundamentalnih nizova $(f_n)$ i $(g_n)$ tipa $*$. Koristeći Propoziciju 3.2.7, moguće je dokazati da su $(f_n + g_n)$ i $(\lambda f_n)$ $s$-fundamentalni nizovi tipa $*$ na $\Omega$, pa možemo definisati $s$-ultradistribucije

$$f + g := [f_n + g_n] \qquad \text{i} \qquad \lambda f := [\lambda f_n].$$

Radi primedbe 3.2.4 definicije su konzistentne. Prema tome, $\mathscr{U}^*(\Omega)$ je vektorski prostor.

Pokažimo da je diferenciranje operacija. Neka je $f = [f_n] \in \mathscr{U}^{\{t\}}(\Omega)$, t.j. $(f_n)$ je $s$-fundamentalan niz tipa Rumijea, i $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Dokazaćemo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ $s$-fundamentalan niz tipa Rumijea. Za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ neka su $(F_n)$ i $P_{(r_p)}(D)$ kao u Definiciju 3.2.1. Kako

$$f_n^{(\beta)} = P_{(r_p)}(D)F_n^{(\beta)} \text{ na } K,$$

zaključujemo prema (3.1.7) slično kao kod dokaza Propozicije 3.2.5 za $\beta = 0$ da postoje $P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, niz $(\widetilde{F}_n)$ glatkih funkcija i neprekidna funkcija $\widetilde{F}_0$ na $\Omega$ definisana sa

$$\widetilde{F}_n := \kappa_K[\mathcal{F}^{-1}\big(\mu_\beta \frac{P_{(r_p)}}{P_{(\widetilde{r}_p)}}\big) * (\kappa_K F_n)], \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

i nosačem $\operatorname{supp} \widetilde{F}_n \subset K_1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, tako da

$$P_{(r_p)}(D)F_n^{(\beta)} = P_{(\widetilde{r}_p)}(D)\widetilde{F}_n \text{ na } K \text{ i } \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} \widetilde{F}_0 \text{ kada } n \to \infty.$$

Znači, $(f_n^{(\beta)})$ je $s$-fundamentalan i definišemo

$$f^{(\beta)} := [f_n^{(\beta)}].$$

Na bazi Primedbe 3.2.4, definicija je konzistentna i $f^{(\beta)} \in \mathscr{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Analogna tvrdnja važi u slučaju Berlinga.

Razmotrićemo operacije množenja i konvolucije sa funkcijom iz $\mathscr{E}^*(\Omega)$. Posmatraćemo samo slučaj Rumijea. Berlingov slučaj je sličan.

Fiksiramo $\omega \in \mathscr{E}^{\{t\}}(\Omega)$ i $f = [f_n] \in \mathscr{U}^{\{t\}}(\Omega)$. Pokazaćemo da je niz $(\omega f_n)$ $s$-fundamentalan, pa može se definisati

$$\omega f := [\omega f_n] \in \mathscr{E}^{\{t\}}(\Omega)$$

i definicija je konzistentna, radi primedbe 3.2.4. Za svaki $K \subset\subset \Omega$ postoje $P_{(r_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, niz glatkih funkcija $(F_n)$ i neprekidna funkcija $F_0$ u $\Omega$ sa $\operatorname{supp} F_n \subset K_1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ tako da

$$\omega f_n = \omega P_{(r_p)}(D)F_n \text{ u } K \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0, \ n \to \infty.$$

Možemo pretpostaviti da $\omega$ ima kompaktan nosač njenim množenjem sa funkcijom odsecanja koja je 1 na $K$. Imamo

$$\widehat{\omega}(\xi) \leq Ce^{-h|\xi|^{1/t}} \quad \text{i} \quad |P_{(r_p)}(\xi)\widehat{F_n}| \leq C_1 e^{c(|\xi|)^{1/t}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

za neke konstante $C > 0$, $C_1 > 0$, $h > 0$ i subordiniranu funkciju $c$, radi (3.1.6). Radi (3.1.7), postoji $P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, gde $(\widetilde{r}_p) \in \mathcal{R}$ sa $r_p/\widetilde{r}_p \downarrow 0$ kada $p \to \infty$, tako da

$$(\widehat{\omega} * (P_{(r_p)}\widehat{F_n}))/P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

Ako uzmemo
$$G_n := \kappa_K \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{\omega} * (P_{(r_p)}\widehat{F_n})}{P_{(\widetilde{r}_p)}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
dobijamo da
$$\begin{array}{l} \omega f_n = P_{(\widetilde{r}_p)}(D) G_n \text{ na } K (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} G_n \subset K_1 (n \in \mathbb{N}_0) \\ \text{i} \quad G_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} G_0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty. \end{array},$$
Znači, $(\omega f_n)$ je $s$-fundamentalan niz na $\Omega$.

Štaviše, ako je $f = [f_n]$ i $\omega \in \mathscr{D}^{\{t\}}(\Omega)$, tada
$$\omega * f := [\omega * f_n],$$
jer
$$\omega * P(D) F_n = P(D)(\omega * F_n)$$
na svakom kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^d$ za $n \in \mathbb{N}$.

Opštije, tačno je sledeće: ako su $(f_n)$ i $(g_n)$ $s$-fundamentalni nizovi na $\mathbb{R}^d$ i $\operatorname{supp}(g_n) \subset K_0 \subset\subset \mathbb{R}^d$, tada je $(f_n * g_n)$ $s$-fundamentalan niz na $\mathbb{R}^d$.

## 3.3 Nizovi $s$-ultradistribucija

**Definicija 3.3.1.** *Neka je $f^m \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ za $m \in \mathbb{N}_0$, t.j.*
$$f^m = [(f_n^m)_n],$$
*gde sa $(f_n^m)_n$ označavamo s-fundamentalnog niza koji predstavlja $f^m$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz $(f^m)$ konvergira elementu $f^0$ iz $\mathscr{U}^*(\Omega)$ i pišemo*
$$f^m \xrightarrow{s} f^0 \text{ kada } m \to \infty \ (\text{u } \mathscr{U}^*(\Omega)) \qquad \text{ili} \qquad s\text{-}\lim_{m\to\infty} f^m = f^0 \ (\text{u } \mathscr{U}^*(\Omega))$$
*ako za svaki $K_1 \subset\subset \Omega$ i $K \subset\subset K_1^\circ$ postoje $P \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije $F_n^m$ na $\Omega$ $(m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N})$ i neprekidne funkcije $F^m$ na $\Omega$ $(m \in \mathbb{N}_0)$, sa nosačima sadržanim u $K_1$, tako da*
$$\begin{array}{l} f_n^m = P(D) F_n^m \ \text{ na } K \ \ (n \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}_0); \\ F_n^m \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_n^0 \ \text{ kada } m \to \infty \text{ ravnomerno po } n \in \mathbb{Z}_+; \\ F_n^m \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F^m \ \text{ kada } n \to \infty \ \ (m \in \mathbb{N}_0) \quad \text{i} \quad F^m \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F^0 \ \text{ kada } m \to \infty. \end{array}$$

Znamo da navedene tvrdnje povlače

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n^m = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} F_n^m \quad \text{in} \quad \mathscr{C}(K).$$

**Teorema 3.3.2.** *Ako limes* $s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} f^m$ *postoji, onda je on jedinstven.*

### 3.3.1 Dejstvo na test funkcijama iz $\mathscr{D}^*(\Omega)$

Neka je $f = [f_n] \in \mathscr{U}^*(\Omega)$, gde $(f_n)$ je $s$-fundamentalan niz koji zadovoljava Definiciju 3.2.1, t.j. za svako $K, K_1 \subset\subset \Omega$ tako da $K \subset\subset K_1^\circ$, i za neko $P(D) \in \mathcal{P}^*$ postoje glatke funkcije $F_n$ $(n \in \mathbb{N})$ i neprekidna funkcija $F_0$ na $\Omega$ tako da

$$f_n = P(D)F_n \ \text{ na } K \ \ (n \in \mathbb{N}), \quad \operatorname{supp} F_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0) \tag{3.3.1}$$
$$\text{i} \ \ F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} F_0 \ \text{ kada } n \to \infty.$$

Dejstvo $f$ na test funkciju $\varphi$ iz $\mathscr{D}^*(\Omega)$ je preslikavanje

$$f : \mathscr{D}^*(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \tag{3.3.2}$$

gde

$$(f, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} := \lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_K F_0(x)[P(-D)\varphi](x)\,dx. \tag{3.3.3}$$

Ako, pored (3.3.1), imamo

$$f_n = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n \ \text{ on } K \ \ (n \in \mathbb{Z}_+), \ \ \operatorname{supp} \widetilde{F}_n \subset K_1 \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$$
$$\text{i} \ \ \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathscr{C}(K)} \widetilde{F}_0 \ \text{ kada } n \to \infty$$

za neki $\widetilde{P}(D) \in \mathcal{P}^*$, glatke funkcije $\widetilde{F}_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ i neprekidnu funkciju $\widetilde{F}_0$ na $\Omega$, tada koristeći parcijalnu integraciju imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_K \widetilde{F}_0(x)[\widetilde{P}(-D)\varphi](x)\,dx,$$

t.j. definicija u (3.3.3) je konzistentna.

Jasno, (3.3.2) je linearno preslikavanje. Za dokaz da je (3.3.2) sekvencijalno neprekidno potreban nam je sledeći rezultat iz [38]: ako niz $\varphi_n \to \varphi_0$ kada $n \to \infty$ u $\mathscr{D}^*(\Omega)$, tada $P(D)\varphi_n \to P(D)\varphi_0$ u $\mathscr{D}^*(\Omega)$ za svakog ultradiferencijalnog operatora $P(D) \in \mathcal{P}^*$.

**Teorema 3.3.3.** $(a)$ *Neka je* $f \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ *i* $\varphi_m \to \varphi_0$ *kada* $m \to \infty$ *u* $\mathscr{D}^*(\Omega)$. *Tada*

$$(f, \varphi_m)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \to (f, \varphi_0)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \quad \text{kada } m \to \infty.$$

$(b)$ *Neka* $f^m \to f^0$ *kada* $m \to \infty$ *u* $\mathscr{U}^*(\Omega)$. *Tada*

$$(f^m, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \to (f^0, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \qquad \text{kada} \quad m \to \infty$$

*za svaku* $\varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega)$.

## 3.4 Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

Simbol $\mathscr{P}^{2*}$ koji označava ili $\mathcal{P}^{(2t)}$ ili $\mathcal{P}^{\{2t\}}$.

### 3.4.1 $t$-Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

Neka je $P \in \mathscr{P}^{2*}$. Koristićemo ultradiferencijalne operatore oblika

$$P(H) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha H^\alpha$$

*klase Berlinga* $(p!^{2t})$ (resp. *klase Rumijea* $\{p!^{2t}\}$) tako da

$$(\exists h > 0) \ (\exists C > 0) \ (\text{resp.} (\forall h > 0) \ (\exists C > 0)) \ (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_\alpha| \le \frac{Ch^{|\alpha|}}{(\alpha!)^{2t}};$$

u slučaju Rumijea dati uslov je ekvivalentan sa

$$(\exists (r_p) \in \mathcal{R}) \ (\exists C > 0) \ (\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d) \quad |a_\alpha| \le \frac{C}{(\alpha!)^{2t} R_{|\alpha|}},$$

gde je $R_{|\alpha|}$ definisano u (3.1.1).

**Definicija 3.4.1.** *Niz funkcija* $(f_n)$ *iz* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *naziva se* $t$*-fundamentalni niz (tipa* $*$*) u* $\mathbb{R}^d$ *ako postoji ultradiferencijalni operator* $P \in \mathscr{P}^{2*}$, *funkcije* $F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *oblika*

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha$$

*sa koeficijentima* $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^2$ *za* $n \in \mathbb{Z}_+$ *i funkcija* $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *tako da*

$$f_n = P(H)F_n \ \ na\, \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n \xrightarrow{2} F_0 \quad kada\, n \to \infty, \tag{3.4.1}$$

*gde za* $P(H)F_n$ *iz (3.4.1) podrazumevamo da je u* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *ako važi:*

$$\lim_{k\to\infty} P_k(H)F_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{k} a_\alpha H^\alpha F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} P(2\alpha+1) h_\alpha = f_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kasnije ćemo iskoristiti sledeću tvrdnju koju nam omogučava da $\mathscr{L}^2$-konvergentnog niza u reprezentaciju $t$-fundamentalnih nizova zamenimo nizom koji konvergira i u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i ravnomerno na $\mathbb{R}^d$.

**Lema 3.4.2.** *Neka* $F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$ *i* $F_n \xrightarrow{2} F_0$ *kada* $n \to \infty$. *Označavamo*

$$\widetilde{F}_n := \mathcal{F}^{-1}(G_n),$$

*gde*

$$G_n(\xi) := (1 + |\xi|)^{-d/2} \widehat{F}_n(\xi) \ \ za\ \xi \in \mathbb{R}^d \ \ i\ n \in \mathbb{N}_0.$$

*Tada je* $(\widetilde{F}_n)$ *ograničeni niz glatkih funkcija tako da* $\widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0$ *kada* $n \to \infty$ *i* $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)} \widetilde{F}_0$ *kada* $n \to \infty$.

**Definicija 3.4.3.** *Neka su* $(f_n)$ *i* $(g_n)$ *dva* $t$*-fundamentalna niza na otvorenom skupu* $\Omega$. *Pišemo* $(f_n) \sim_1 (g_n)$ *ako postoje nizovi* $(F_n)$, $(G_n)$ *tako da funkcije* $F_n, G_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(n \in \mathbb{N})$, *koji su konvergentni u* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *i operator* $P \in \mathscr{P}^{2*}$ *tako da*

$$f_n = P(H)F_n, \ \ g_n = P(H)G_n \ \ na\, \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n - G_n \xrightarrow{2} 0 \ \ kada\, n \to \infty.$$

Sledeće dve tvrdnje ćemo koristiti u produžetku.

**Propozicija 3.4.4.** *Ako postoji* $P \in \mathscr{P}^{2*}$, *funkcije* $F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *za* $n \in \mathbb{Z}_+$ *i* $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *tako da*

$$F_n = \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \ \ sa\ (c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^2 \ \ za\ n \in \mathbb{N}_0$$

*i još* $F_n \xrightarrow{2} F_0$ *i* $P(H)F_n \xrightarrow{2} 0$ *kada* $n \to \infty$, *tada* $F_0 = 0$ *na* $\mathbb{R}^d$.

*Posebno, ako je* $F \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ *i* $P(H)F = 0$ *u* $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, *tada* $F = 0$ *na* $\mathbb{R}^d$.

**Propozicija 3.4.5.** *Pretpostavimo da*

$$f_n = P_{(r_p)}(H)F_n = P_{(\widetilde{r}_p)}(H)\widetilde{F}_n \quad na\, \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

*i*

$$F_n \xrightarrow{2} F_0, \qquad \widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0 \quad kada\ \ n \to \infty$$

*za neke ultradiferencijalne operatore* $P_{(r_p)}, P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$*, funkcije* $F_n, \widetilde{F}_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *i* $F_0, \widetilde{F}_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *koji imaju oblik:*

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha, \ \ \widetilde{F}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{c}_{\alpha,n} h_\alpha \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

*gde* $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}$, $(\widetilde{c}_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^2$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$*. Tada postoje ultradiferencijalni operator* $P_{(\overline{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$*, gde je* $(\overline{r}_p) \in \mathcal{R}$ *sa* $r_p/\overline{r}_p \downarrow 0$ *i* $\widetilde{r}_p/\overline{r}_p \downarrow 0$ *kada* $p \to \infty$*, tako da*

$$\left(\frac{P_{(r_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\overline{r}_p)}(2\alpha+1)}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^\infty, \quad \left(\frac{P_{(\widetilde{r}_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\overline{r}_p)}(2\alpha+1)}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^\infty, \tag{3.4.2}$$

*i funkcije* $G_n, \widetilde{G}_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *i* $G_0, \widetilde{G}_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *oblika:*

$$G_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{P_{(r_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\overline{r}_p)}(2\alpha+1)} c_{\alpha,n} h_\alpha, \qquad \widetilde{G}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{P_{(\widetilde{r}_p)}(2\alpha+1)}{P_{(\overline{r}_p)}(2\alpha+1)} \widetilde{c}_{\alpha,n} h_\alpha$$

*za* $n \in \mathbb{N}_0$*, koje zadovoljavaju sledećih uslova:*

$$f_n = P_{(\overline{r}_p)}(H)G_n = P_{(\overline{r}_p)}(H)\widetilde{G}_n \quad na\ \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

*i*

$$G_n \xrightarrow{2} G_0, \qquad \widetilde{G}_n \xrightarrow{2} \widetilde{G}_0 \quad kada\ \ n \to \infty. \tag{3.4.3}$$

*Štaviše,* $G_n = \widetilde{G}_n$ *nad* $\mathbb{R}^d$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$.

*Isto važi i u Berlingovom slučaju sa odgovarajućom notacijom.*

Jasno je da je relacija $\sim_1$ refleksivna i simetrična. Dokazaćemo da je $\sim_1$ tranzitivna.

**Propozicija 3.4.6.** *Relacija* $\sim_1$ *je tranzitivna.*

**Definicija 3.4.7.** *Neka je $(f_n)$ t-fundamentalan niz (tipa $*$) u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Klasa ekvivalencije $[f_n]$ svih t-fundamentalnih nizova (tipa $*$) koji su ekvivalentni sa $(f_n)$ u odnosu na relaciju $\sim_1$ naziva se t-temperirana sekvencijalna ultradistribucija (tipa $*$) ili kratko t-ultradistribucija (tipa $*$) i označava se sa*

$$f := [(f_n)] \text{ ili } f := [f_n].$$

*Skup svih t-ultradistribucija (tipa $*$) na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ označava se sa $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}^*(\mathbb{R}^d)$.*

*Primedba* 3.4.8. Kao i kod prostora $\mathscr{U}^*(\Omega)$ (vidi 3.2.2) mogu se posmatrati odgovarajuće operacije u $\mathscr{T}^*$. Tu nećemo ulaziti u detalje. Samo ćemo primetiti da operacije sabiranja i množenje sa skalarima su dobro definisane na ovom skupu, t.j. $\mathscr{T}^*$ je vektorski linearan prostor.

**Primer 3.4.9.** *Neka je $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i neka $(\delta_n)$ je delta-niz u $\mathscr{D}^*(\mathbb{R}^d)$. Definišemo*

$$F_n := F_0 * \delta_n \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

*Tada $(F_n)$ je niz glatkih funkcija iz $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ koji je t-fundamentalan niz nad $\mathbb{R}^d$ i u Berlingovom i u Rumijeovom slučaju.*

**Primer 3.4.10.** *Neka je $f = [f_n] \in \mathscr{T}^*$ oblika*

$$f_n = P(H)F_n, \text{ gde } P \in \mathscr{P}^{2*} \text{ i } F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

*Štaviše, pretpostavljamo da $F_n \xrightarrow{2} F_0$ kada $n \to \infty$ za neku funkciju $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Definišemo*

$$\widetilde{f}_n := P(H)(F_n * \delta_n) \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

*Tada $(\widetilde{f}_n)$ je t-fundamentalan niz u $\mathbb{R}^d$ i $(f_n) \sim_1 (\widetilde{f}_n)$.*

**Definicija 3.4.11.** *Neka je $f^m \in \mathscr{T}^*$ za $m \in \mathbb{N}_0$, t.j. $f^m = [(f_n^m)_n]$, gde $(f_n^m)_n$ označava t-fundamentalnog niza koji predstavlja $f^m$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz $(f^m)$ konvergira ka $f^0$ u $\mathscr{T}^*$ i pišemo*

$$f^m \xrightarrow{t} f^0 \text{ kada } m \to \infty \quad \text{ili} \quad t\text{-}\lim_{m\to\infty} f^m = f^0$$

*ako postoje* $P \in \mathscr{P}^{2*}$, *glatke funkcije* $F_n^m \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}_+)$ *i funkcije* $F^m \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $(m \in \mathbb{N}_0)$, *tako da*

$$f_n^m = P(H)F_n^m \quad \textit{nad } \mathbb{R}^d \ (n \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}_0);$$
$$F_n^m \xrightarrow{2} F_n^0 \ \textit{kada}\, m \to \infty,\ \textit{uniformno po}\ n \in \mathbb{Z}_+;$$
$$F_n^m \xrightarrow{2} F^m \ \textit{kada}\ n \to \infty \ (m \in \mathbb{N}_0) \quad i \quad F^m \xrightarrow{2} F^0 \ \textit{kada}\, m \to \infty.$$

Uslovi u definiciji povlače da

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n^m = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} F_n^m \ \text{ u } \ \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

**Teorema 3.4.12.** *Ako postoji limes* $t\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} f^m$, *tada je on jedinstven.*

U nastavku trebaće nam sledeći rezultat:

**Lema 3.4.13.** *Neka je* $\varphi$ *funkcija iz* $\mathscr{D}^*(\Omega)$, *tako da*

$$\varphi(x) = 1 \ \textit{za}\ x \in B(0, 1/2)$$

*i označimo*

$$\varphi_m(x) := \varphi(x/m) \ \textit{za}\ x \in \mathbb{R}^d \ \textit{i}\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

*Ako je* $f = [f_n]$ *t-ultradistribucija, tada* $f\varphi_m \xrightarrow{t} f$ *kada* $m \to \infty$.

**Posledica 3.4.14.** *Za svaku t-ultradistribuciju* $f^0$ *postoji niz* $(f^m)$ *sastavljen od t-ultradistribucijama tako da* $f^m \xrightarrow{t} f^0$ *kada* $m \to \infty$.

*Primedba* 3.4.15. Kao i u slučaju $s$-fundamentalnih nizova koga smo razgledali u 3.2.15, svaki $t$-fundamentalan niz $(f_n)$ za koga važi (3.4.1) može se identifikovati sa formalnom reprezentacijom

$$f = P(H)F_0,$$

jer svaka reprezentacija, prema (3.4.10) iz dela 3.4.3, definiše istog elementa iz $\mathscr{T}^*$ .

### 3.4.2 $\widetilde{t}$-Temperirane sekvencijalne ultradistribucije

U ovom delu razvijamo sekvencijalnu teoriju temperiranih ultradistribucija koja je tesno povezana sa sekvencijalnim pristupom kojeg smo razradili u delovima 3.2 i 3.3.

**Definicija 3.4.16.** *Niz glatkih funkcija $(f_n)$ naziva se $\widetilde{t}$-fundamentalan niz (tipa $*$) u $\mathbb{R}^d$, ako postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}^*_u$, funkcija $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ i niz $(F_n)$ u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ tako da*

$$f_n = P(D)(P_1 F_n) \text{ nad } \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n \xrightarrow{2} F_0 \text{ kada } n \to \infty. \tag{3.4.4}$$

Dejstvo operatora $P(D)$ na $P_1 F_n$ podrazumeva se kao u delu 3.2; on je limes od

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha (P_1 F_n)(x)$$

kada $m \to \infty$ za $x \in \mathbb{R}^d$. Sledeća tvrdnja će nam omogučiti da prebacimo fundamentalan niz iz jednog oblika u drugi.

Za dato $h > 0$ subordiniranu funkciju $c$ označavamo radi jednostavnosti

$$E_{\pm h}(u) := e^{\pm h u^{1/t}} \quad \text{i} \quad E^{\pm c}(u) := e^{\pm c(u)^{1/t}} \quad \text{za} \ \ u \geq 0.$$

**Lema 3.4.17.** *Neka su $P_1$, $F_n$ i $F_0$ kao u (3.4.4). Za $P_1$ pretpostavljamo da važe ograničenja (3.1.4) u Berlingovom slučaju (resp. (3.1.6) u Rumijeovom slučaju) u obliku:*

$$|P_1(x)| \leq C E_{h_1}(|x|) \quad (resp.\ |P_1(x)| \leq C E^{c_1}(|x|)) \quad za\ x \in \mathbb{R}^d,$$

*gde je $h_1 > 0$ podobna konstanta (resp. $c_1$ je pogodna subordinirana funkcija). Tada*

*(a) za dato $h > 0$ (resp. za datu subordiniranu funkciju $c$) postoji $r > 0$ (resp. $(r_p) \in \mathcal{R}$) tako da*

$$\big|[E_h \mathcal{F}^{-1}\big(P_1/P_r\big)](x)\big| < \infty \quad \big(resp.\ \big|[E^c \mathcal{F}^{-1}\big(P_1/P_{(r_p)}\big)](x)\big| < \infty\big)$$

*za svako $x \in \mathbb{R}^d$.*

*(b) postoji $r > 0$ (resp.$(r_p) \in \mathcal{R}$) tako da*

$$E_{-2h_1}\big[(P_1 F_n - P_1 F_0) * \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_r)\big] \ \xrightarrow{2}\ 0$$

$$\big(resp.\ E^{-c}\big[(P_1 F_n - P_1 F_0) * \mathcal{F}^{-1}(P_1/P_{(r_p)})\big] \ \xrightarrow{2}\ 0\big)$$

*kada $n \to \infty$, gde je $c$ subordinirana funkcija za koju $2c_1^{1/t} \leq c^{1/t}$.*

**Definicija 3.4.18.** *Neka su $(f_n)$ i $(g_n)$ $\widetilde{t}$-fundamentalni nizovi. Pišemo*

$$(f_n) \sim_2 (g_n)$$

*ako postoje nizovi funkcija $(F_n)$, $(G_n)$, $F_n, G_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(n \in \mathbb{N})$, koji konvergiraju u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, operator $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ tako da*

$$f_n = P(D)(P_1 F_n), \;\; g_n = P(D)(P_1 G_n) \quad \text{nad } \mathbb{R}^d$$

*i $F_n - G_n \xrightarrow{2} 0$ kada $n \to \infty$.*

Sledeća propozicija je važna kao i u prethodnim slučajevima. Ona se može dokazati korišćenjem Furijeove transformacije slično kao i kod Propozicije 3.2.7.

**Propozicija 3.4.19.** *Ako su tačne pretpostavke Definicije 3.4.18 za $(f_n)$ i ako*

$$P(D)(P_1 F_n) \xrightarrow{2} 0 \text{ kada } n \to \infty,$$

*tada $F_n \xrightarrow{2} 0$ kada $n \to \infty$. Naročito, ako $P(D)(P_1 F) = 0$, tada $F = 0$.*

Glavna tvrdnja u ovom delu odnosi se na smenu predstavnika neke $\widetilde{t}$-ultradistribucije (vidi Definiciju 3.4.22 dole). Posmatramo slučaj Rumijea.

Pretpostavimo da $P_{(r_p)}, P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P^1_{(r_p)}, P^2_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$ i $(F_n), (\widetilde{F}_n)$ su nizovi funkcija u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, koji su i oba konvergentni u $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$, i zadovoljavaju Definiciju 3.4.16, t.j.

$$f_n = P_{(r_p)}(D)(P^1_{(r_p)} F_n) = P_{(\widetilde{r}_p)}(D)(P^2_{(\widetilde{r}_p)} \widetilde{F}_n) \;\text{ nad }\; \mathbb{R}^d \quad \text{za } (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{3.4.5}$$

tako da

$$\max\left\{ |P_{(r_p)}(x)|, |P_{(\widetilde{r}_p)}(x)|, |P^1_{(r_p)}(x)|, |P^2_{(\widetilde{r}_p)}(x)| \right\} \leq C e^{c(|x|)^{1/t}} \tag{3.4.6}$$

za podesno izabranu subordiniranu funkciju $c$ i $x \in \mathbb{R}^d$. Možemo pretpostaviti, bez gubljenja opštosti, da $P^1_{(r_p)} = P^2_{(\widetilde{r}_p)} = P_{(\overline{r}_p)}$. Možemo iskoristiti u (3.4.5) umesto $P^1_{(r_p)}(x) F_n(x)$ i $P^2_{(\widetilde{r}_p)}(x) \widetilde{F}_n(x)$, respektivno, sledećih izraza:

$$P_{(\overline{r}_p)}(x) \frac{P^1_{(r_p)}(x) F_n(x)}{P_{(\overline{r}_p)}(x)} \quad \text{i} \quad P_{(\overline{r}_p)}(x) \frac{P^2_{(\widetilde{r}_p)}(x) \widetilde{F}_n(x)}{P_{(\overline{r}_p)}(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

gde biramo niz $(\overline{r}_p) \in \mathcal{R}$ da raste dovoljno sporo kako bi sigurno imali $\mathscr{L}^2$-konvergenciju nizova

$$\Big(\frac{P^1_{(r_p)}(x)F_n(x)}{P_{(\overline{r}_p)}(x)}\Big)_n \quad \text{i} \quad \Big(\frac{P^2_{(\widetilde{r}_p)}(x)\,\widetilde{F}_n(x)}{P_{(\overline{r}_p)}(x)}\Big)_n, \text{ respektivno.}$$

Ove primedbe nam pomažu da dokažemo sledeću Propoziciju:

**Propozicija 3.4.20.** *Neka $P_{(r_p)}, P_{(\widetilde{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P_{(\overline{r}_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}_u$ i funkcije $F_n, \widetilde{F}_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{N}$, i $F_0, \widetilde{F}_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ zadovoljavaju Definiciju 3.4.16, t.j.*

$$f_n = P_{(r_p)}(D)(P_{(\overline{r}_p)}F_n) = P_{(\widetilde{r}_p)}(D)(P_{(\overline{r}_p)}\widetilde{F}_n) \;\; on\, \mathbb{R}^d \quad (n \in \mathbb{N})$$

*i $F_n \xrightarrow{2} F_0$, $\widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0$ kada $n \to \infty$, tako da važi (3.4.6). Tada postoje $P_{(r^0_p)} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ gde $(r^0_p) \in \mathcal{R}$ i funkcije $\overline{F}_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\overline{F}_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ tako da*

$$f_n = P_{(r^0_p)}(D)(P_{(\overline{r}_p)}\overline{F}_n) \;\; nad\, \mathbb{R}^d \quad i \quad \overline{F}_n \xrightarrow{2} \overline{F}_0 \;\; kada \;\; n \to \infty.$$

Kako bi dokazali da je $\sim_2$ iz Definicije 3.4.18 relacija ekvivalencije, dovoljno je pokazati da je tranzitivna.

**Propozicija 3.4.21.** *Relacija $\sim_2$ je tranzitivna.*

**Definicija 3.4.22.** *Neka je $(f_n)$ $\widetilde{t}$-fundamentalan niz (tipa $*$) u otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Klasa ekvivalencije $[f_n]$ svih $\widetilde{t}$-fundamentalnih nizova (tipa $*$) ekvivalentnim sa $(f_n)$ u odnosu na relaciju $\widetilde{\sim_2}$ naziva se $\widetilde{t}$-temperirana sekvencijalna ultradistribucija (tipa $*$) ili kratko $\widetilde{t}$-ultradistribucija (tipa $*$) i označava se sa $f = [f_n]$. Skup svih $\widetilde{t}$-ultradistribucija (tipa $*$) u datom otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ označava se sa $\widetilde{\mathscr{T}^*} = \widetilde{\mathscr{T}^*}(\mathbb{R}^d)$.*

Definišemo konvergenciju u $\widetilde{\mathscr{T}^*}$.

**Definicija 3.4.23.** *Neka $f^m \in \widetilde{\mathscr{T}^*}$ za $m \in \mathbb{N}_0$, t.j. $f^m = [(f^m_n)_n]$, gde $(f^m_n)_n$ označava $\widetilde{t}$-fundamentalan niz koji predstavlja $f^m$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da niz $(f^m)$ konvergira prema $f^0$ u $\widetilde{\mathscr{T}^*}$ i pišemo*

$$f^m \xrightarrow{\widetilde{t}} f^0 \;\; kada \; m \to \infty \;\; ili \; \widetilde{t}\text{-}\lim_{m\to\infty} f^m = f^0,$$

*ako postoje $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$, glatke funkcije $F_n^m \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}_+)$ i funkcije $F^m \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ tako da*

$$f_n^m = P(D)(P_1 F_n^m) \ \ \textit{nad}\ \mathbb{R}^d \ \ (n \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}_0);$$

$$F_n^m \xrightarrow{2} F_n^0 \ \ \textit{kada}\ m \to \infty,\ \ \textit{uniformno po}\ n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$F_n^m \xrightarrow{2} F^m \ \ \textit{kada}\ \ n \to \infty \ \ (m \in \mathbb{N}_0) \quad \textit{i} \quad F^m \xrightarrow{2} F^0 \ \ \textit{kada}\ m \to \infty.$$

Pretpostavke u definiciji povlače da

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} F_n^m = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} F_n^m \ \ \text{u} \ \ \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Pogodnim modifikacijama u dokazima Propozicije 3.4.19 i Teoreme 3.4.12, dokazuje se sledeća teorema:

**Teorema 3.4.24.** *Ako limes $\widetilde{t}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f^n$ postoji, tada je on jedinstven.*

Iz [65] znamo da svakoj $f \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ odgovara formalna reprezentacija $f = P(D)(P_1 F_0)$, gde je $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ i $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ je funkcija oblika

$$F_0 = \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0} h_\alpha \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ sa } (c_{\alpha,0})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^2.$$

Zapravo, koristićemo sledeću dobro poznatu tvrdnju koju ovde formulišemo kao lemu:

**Lema 3.4.25.** *$f \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako*

$$f = P(D)(P_1 F_0) \tag{3.4.7}$$

*za nekih $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ i $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ oblika*

$$F_0 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,0} h_\alpha \quad \textit{gde} \ \ (c_{\alpha,0}) \in l^2, \tag{3.4.8}$$

*t.j.*

$$(f,\varphi)_{\mathscr{S}'^*} = \int_{\mathbb{R}^d} F_0(x) P_1(x) P(-D)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d).$$

Dokaz Leme 3.4.25 je posledica vrlo poznate teoreme za reprezentaciju koja se bazira na Han-Banahovoj teoremi kao i na tvrdnje $(a)$ i $(b)$ iz Leme 3.1.4.

Možemo formulisati gornju tvrdnju u obliku propozicije koju ćemo koristiti u delu 3.5.

**Propozicija 3.4.26.** *Neka je $f \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ oblika (3.4.7)-(3.4.8). Tada niz $(f_n)$, gde*

$$f_n := P(D)(P_1 F_n) \text{ i } F_n := \sum_{|\alpha|=0}^{n} c_{\alpha,0} h_\alpha \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

*je $\widetilde{t}$-fundamentalni i određuje*

$$\widetilde{f} = [f_n] \in \widetilde{\mathscr{T}}^*.$$

*Obratno, ako $\widetilde{f} = [f_n] \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$, gde je $(f_n)$ $\widetilde{t}$-fundamentalni niz oblika (3.4.4) dat u Definiciju 3.4.16, tada odgovarajuća $f = P(D)(P_1 F_0)$, gde $F_0$ je limes niza $(F_n)$ u $\mathscr{L}^2$, je element iz $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.*

*Gornja korespondencija između $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{\mathscr{T}}^*$ definiše linearnu bijekciju između ovih prostora.*

### 3.4.3 Temperirane ultradistribucije kao funkcionali

Neka je $\varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i neka je $f = [f_n]$ element iz $\mathscr{T}^*$, gde funkcije $f_n$ imaju oblik

$$f_n = P(H) F_n$$

nad $\mathbb{R}^d$ sa $P \in \mathcal{P}^{2*}$ i $F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$ tako da $F_n \xrightarrow{2} F_0$ kada $n \to \infty$ za neku $F_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Definišemo dejstvo $f = [f_n]$ na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ kao preslikavanje:

$$\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto f(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathscr{T}^*} \in \mathbb{R}, \tag{3.4.9}$$

gde

$$(f, \varphi)_{\mathscr{T}^*} := \lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P(H) \varphi)(x)\, dx = (F_0, P(H)\varphi)_{\mathscr{L}^2}. \tag{3.4.10}$$

Kao i u slučaju $s$-ultradistribucija, ako postoji druga reprezentacija od $f_n$ oblika

$$f_n = \widetilde{P}(H) \widetilde{F}_n \text{ na } \mathbb{R}^d \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ gde } \widetilde{P} \in \mathcal{P}^{2*} \text{ i } \widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0 \text{ kada } n \to \infty,$$

tada imamo

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{F}_0 \widetilde{P}(H) \varphi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P(H) \varphi)(x)\, dx,$$

t.j. definicija $(f, \varphi)_{\mathscr{T}^*}$ u (3.4.10) je konzistentna. Lema 3.1.4 povlači da je preslikavanje (3.4.9) linearno.

Dokazaćemo sada isto za $f = [f_n] \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$, gde funkcije $f_n$ imaju oblik

$$f_n = P(D)(P_1 F_n) \text{ za } P \in \mathcal{P}^*,\ P_1 \in \mathcal{P}^*_u,\ F_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)\ (n \in \mathbb{Z}_+)$$
$$\text{i } F_n \xrightarrow{2} F \text{ kada } n \to \infty \text{ za neko } F \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

Dejstvo $f = [f_n] \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$ na $\varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ definiše se preslikavanjem:

$$\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto (f, \varphi)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*} \in \mathbb{R}, \tag{3.4.11}$$

gde

$$(f, \varphi)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*} := \lim_{n\to\infty} (F_n, P_1 P(-D)\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} (F_0 P_1 P(-D)\varphi)(x)\, dx. \tag{3.4.12}$$

Treba primetiti da limes u (3.4.11) postoji, jer $P_1 P(-D)\varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, kao posledica dela $(b)$ Leme 3.1.4.

Ako $f_n$ je prikazana u drugom obliku

$$f_n = \widetilde{P}(D)(\widetilde{P}_1 \widetilde{F}_n) \text{ nad } \mathbb{R}^d \text{ za } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ gde } \widetilde{P}(D) \in \mathcal{P}^*,\ \widetilde{P}_1 \in \mathcal{P}^*_u,$$
$$\widetilde{F}_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ za } n \in \mathbb{N} \text{ i } \widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_0 \text{ kada } n \to \infty \text{ za neko } \widetilde{F}_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

tada

$$\lim_{n\to\infty} (\widetilde{F}_n, \widetilde{P}_1 \widetilde{P}(-D)\varphi) = \lim_{n\to\infty} (F_n, P_1 P(-D)\varphi), \qquad \text{za } \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d),$$

t.j. definicija u (3.4.12) je konzistentna. Linearnost preslikavanja (3.4.11) sledi od Leme 3.1.4.

Neprekidnost preslikavanja (3.4.9) i (3.4.11) sledi zbog sledeće tvrdnje.

**Propozicija 3.4.27.** *Neka $f \in \mathscr{T}^*$ (resp. $f \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$) i neka $\varphi_n \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ za $n \in \mathbb{N}_0$ su funkcije za kojih $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}^*} \varphi_0$ kada $n \to \infty$. Tada*

$$(f, \varphi_n)_{\mathscr{T}^*} \to (f, \varphi_0)_{\mathscr{T}^*} \quad (\textit{resp. } (f, \varphi_n)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*} \to (f, \varphi_0)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*}) \quad \textit{kada } n \to \infty.$$

Gornji rezultat može se generalizovati na sledeći način:

**Propozicija 3.4.28.** *Neka $f^m \in \mathscr{T}^*$ (resp. $f^m \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$) i $\varphi_m \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Ako*

$$f^m \xrightarrow{t} f^0 \ (\textit{resp. } f^m \xrightarrow{\tilde{t}} f^0) \textit{ i } \varphi_m \xrightarrow{\mathscr{S}^*} \varphi_0 \textit{ kada } m \to \infty,$$

*tada*

$$(f^m,\varphi_m)_{\mathscr{T}^*}\to(f^0,\varphi_0)_{\mathscr{T}^*}\ \ \textit{(resp. } (f^m,\varphi_m)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*}\to(f^0,\varphi_0)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*})\ \ \textit{kada}\ \ m\to\infty.$$

*Dokaz.* Kao i ranije, navodimo dokaz samo u slučaju $\mathscr{T}^*$. Prema Definiciji 3.4.11, imamo

$$\lim_{m\to\infty}(f^m,\varphi_m)_{\mathscr{T}^*}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(F_n^m,P(H)\varphi_m)_{\mathscr{L}^2},$$

gde $F_n^m\xrightarrow{2}F^m$ kada $n\to\infty$ za svako $m\in\mathbb{Z}_+$ i $F^m\xrightarrow{2}F^0$ kada $m\to\infty$. Prema tome, koristeći Švarcovu nejednakost, dobijamo

$$\begin{aligned}&|(F^m,P(H)\varphi_m)_{\mathscr{L}^2}-(F^0,P(H)\varphi_0)_{\mathscr{L}^2}|\\ &\le|(F^m,P(H)(\varphi_m-\varphi_0))_{\mathscr{L}^2}|+|(F^m-F^0,P(H)\varphi_0)_{\mathscr{L}^2}|\\ &\le\|F^m\|_2\cdot\|P(H)(\varphi_m-\varphi_0)\|_2+\|F^m-F^0\|_2\cdot\|P(H)\varphi_0\|_2.\end{aligned}$$

Sada je dovoljno primeniti deo $(c)$ Leme 3.1.4 da bi dokaz bio kompletan. □

## 3.5 Relacije između prostorima temperiranih ultradistribucija

U vezi sa prostorima $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i njegovog duala $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$, gde $*=(t)$ u Berlingovom slučaju (resp. $*=\{t\}$ u Rumijeovom slučaju) razmotrićemo sledećih prostora koji se sastoje od brojnih nizova:

$$\mathbf{s}^*=\Big\{(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\colon\ \forall h>0\ (\text{resp. }\exists h>0)\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}|a_\alpha|^2\,e^{h|\alpha|^{1/(2t)}}<\infty\Big\}\tag{3.5.1}$$

i

$$\mathbf{s}'^*=\Big\{(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\colon\ \exists k>0\ (\text{resp.}\forall k>0)\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}|b_\alpha|^2\,e^{-k|\alpha|^{1/(2t)}}<\infty\Big\}.\tag{3.5.2}$$

Prema Keteove (Köthe) teorije za ešelon prostora i koešelona prostora (koja je izložena u [37]) prostori $\mathbf{s}^*$ i $\mathbf{s}'^*$ sa njihovim prirodnim strukturama konvergencije čine dualni par.

Takođe, dobro je poznato da preslikavanje

$$\mathbf{s}^*\ \ni\ (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\ \mapsto\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha h_\alpha\ \in\ \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)\tag{3.5.3}$$

je bijektivni izomorfizam između prostorima $\mathbf{s}^*$ i $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$.

Sa druge strane, svakom elementu $f \in \mathscr{T}^*$ možemo pridružiti jedinstveni niz $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in \mathbf{s}'^*$.

Zapravo, pretpostavimo da $f = [f_n] \in \mathscr{T}^*$ zadovoljava (3.4.1), t.j.

$$f_n = P(H)F_n \ \text{ na } \mathbb{R}^d \ \ (n \in \mathbb{Z}_+) \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{2} F_0 \ \text{ kada } \ n \to \infty, \tag{3.5.4}$$

gde

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \quad \text{sa} \quad (c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in l^2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.5.5}$$

Štaviše, neka $\varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ima oblik

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} r_\alpha h_\alpha. \tag{3.5.6}$$

Znamo da $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in \mathbf{s}^*$ (vidi 3.5.3).

Na osnovu (3.4.10), (3.5.4), (3.5.5) i (3.5.6), imamo

$$(f, \varphi)_{\mathscr{T}^*} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P(2\alpha+1) c_{\alpha,n} r_\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha r_\alpha, \tag{3.5.7}$$

gde

$$b_\alpha := P(2\alpha+1)c_{\alpha,0}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \tag{3.5.8}$$

jer $c_{\alpha,n} \to c_{\alpha,0}$ u $l^2$ kada $n \to \infty$ za $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

Pridružićemo elementu $f = [f_n] \in \mathscr{T}^*$ niz $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \in s'^*$ definisan u (3.5.8) koji ne zavisi od reprezentacije $(f_n)$ distribucije $f$, prema Propoziciji 3.4.5.

Opisano preslikavanje je bijektivni izomorfizam između prostora $\mathscr{T}^*$ i $\mathbf{s}'^*$.

Sledeća tvrdnja je dobro poznata (videti [11]-[35]):

**Propozicija 3.5.1.** *Bijektivni izomorfizam* (3.5.3) *povlači izomorfizam iz* $\mathbf{s}'^*$ *u* $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ *dat sa*

$$\mathbf{s}'^* \ \ni \ (b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \ \mapsto \ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha \ \in \ \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d).$$

Prema prethodnim pretpostavkama i Propoziciju 3.5.1 svakoj

$$f = [f_n] \in \mathscr{T}^*$$

moguće je jednoznačno pridružiti element iz $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ koji ima oblik $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha$. Sa druge strane, moguće je pridružiti $f = [f_n] \in \mathscr{T}^*$ linearni funkcional $T$ na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ koji je dat formulom

$$T(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathscr{T}^*}, \qquad \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d), \tag{3.5.9}$$

gde desna strana $(f, \varphi)_{\mathscr{T}^*}$ je definisana u (3.5.7). Jasno, funkcional $T$ je linearan i neprekidan na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, t.j. $T \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$.

Obratno, ako $T \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ ima oblik $T = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha$, tada niz $(f_n)$ gde su $f_n (n \in \mathbb{Z}_+)$ funkcije date sa (3.5.4), gde

$$F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{n} \frac{b_\alpha h_\alpha}{P(2\alpha+1)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+) \quad \text{i} \quad F_0 = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{b_\alpha h_\alpha}{P(2\alpha+1)},$$

je $t$-fundamentalan i $f = [f_n]$ je element iz $\mathscr{T}^*$ koji odgovara na $T$.

Znači možemo formulisati sledeću propoziciju:

**Propozicija 3.5.2.** *Preslikavanje $B : \mathscr{T}^* \to \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ dato sa*

$$\mathscr{T}^* \ni f \;\mapsto\; T = B(f) \in \mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d),$$

*gde*

$$T(\varphi) := (f, \varphi)_{\mathscr{T}^*} \text{ za } \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d),$$

*je linearno sekvencijalno neprekidna bijekcija.*

Formulišemo sada završnu teoremu ovog dela.

**Teorema 3.5.3.** *(i) Za svakog neprekidnog linearnog funkcionala $T$ na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ postoji jedinstvena $t$-ultradistribucija $f \in \mathscr{T}^*$ tako da*

$$T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathscr{T}^*}, \quad \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d). \tag{3.5.10}$$

*Obratno, za svaku $t$-ultradistribuciju $f$, formulom (3.5.10) je definisan sekvencijalni neprekidni linearni funkcional na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$.*

*Korespondencija između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $t$-ultradistribucija iz $\mathscr{T}^*$, zadata relacijom (3.5.10), je bijekcija.*

(ii) *Niz t-ultradistribucija* $(f^m)$ *oblika* $f^m = [(f_n^m)_n] \in \mathscr{T}^*$, *gde* $(f_n^m)_n$ *su t-fundamentalni nizovi za* $m \in \mathbb{Z}_+$, *konvergira ka* $f^0 \in \mathscr{T}^*$ *ako i samo ako*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(f_n^m, \varphi)_{\mathscr{T}^*} = (f^0, \varphi)_{\mathscr{T}^*}, \qquad \varphi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d). \tag{3.5.11}$$

*Primedba* 3.5.4. Već smo dokazali u Propozicijama 3.4.26 i 3.4.28 da postoji linearna neprekidna bijekcija između prostorima $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{\mathscr{T}}^*$, t.j. prostori su izomorfni: $\mathscr{S}'^*(\mathbb{R}^d) \cong \widetilde{\mathscr{T}}^*$.

Primedba 3.5.4 zajedno sa Teoremom 3.5.3 vodi nas do sledećeg zaključka:

**Teorema 3.5.5.** *Prostori* $\mathscr{T}^*$ *i* $\widetilde{\mathscr{T}}^*$ *su izomorfni:* $\mathscr{T}^* \cong \widetilde{\mathscr{T}}^*$. *Ovo označava da svaku* $f \in \mathscr{T}^*$ *je moguće predstaviti kao klasu ekvivalencije* $\widetilde{t}$*-fundamentalnih nizova u smislu Definicije 3.4.16.*

*Obratno, svaku* $f \in \widetilde{\mathscr{T}}^*$ *moguće je predstaviti kao klasu ekvivalencije t-fundamentalnih nizova u smislu Definicije 3.4.1. Strukture konvergencija opisane u Definicijama 3.4.11 i 3.4.23 su ekvivalentne.*

## 3.6 $s$-ultradistribucije kao neprekidni linearni funkcionali

Znamo da linearni funkcional $f$ na odgovarajućem prostoru test funkcija je ultradistiribucija ili temperirana ultradistribucija ako je on sekvencijalno neprekidan.

Koristeći naš pristup za $\widetilde{t}$-ultradistribucije dokazaćemo sledeće:

**Teorema 3.6.1.** *Ako je* $f \in \mathscr{T}^* \cong \widetilde{\mathscr{T}}^*$, *tada* $f \in \mathscr{U}^*(\Omega)$.

Sledeća tvrdnja sledi od dokaza Teoreme 3.6.1.

**Posledica 3.6.2.** *Neka je* $f \in \mathscr{T}^* \cong \widetilde{\mathscr{T}}^*$, *neka je* $\Omega$ *otvoreni skup u* $\mathbb{R}^d$ *i neka je* $\theta \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R}^d)$ *funkcija za koju* $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$. *Tada* $\theta f = [f_n] \in \mathscr{U}^*(\mathbb{R}^d)$ *za nekog s-fundamentalnog niza* $(f_n)$ *koji ima sledeće osobine: za svaki* $K \subset\subset \Omega$ *postoji* $P \in \mathcal{P}^*$ *i niz funkcija* $F_n$ *tako da*

$$f_n = P(D)F_n \ \ \text{na } K \ \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)} F_0 \quad \text{kada } \ n \to \infty.$$

*Štaviše*

$$\operatorname{supp} F_n \subset \Omega \quad \text{za } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Sada možemo dokazati glavni rezultat ovog dela.

**Teorema 3.6.3.** *(i) Za svakog neprekidnog linearnog funkcionala $T$ na $\mathscr{D}^*(\Omega)$ postoji jedinstvena s-ultradistribucija $f \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ tako da*

$$T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)}, \quad \varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega), \tag{3.6.1}$$

*gde $(f, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)}$ je definisan sa* (3.3.3).

*Obratno, za svaku s-ultradistribuciju $f \in \mathscr{U}^*(\Omega)$, formulom (3.6.1) je definisan neprekidni linearni funkcional $T$ na $\mathscr{D}^*(\Omega)$.*

*Korespondencija između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathscr{D}^*(\Omega)$ i s-ultradistribucije u $\mathscr{U}^*(\Omega)$, opisana u (3.6.1), je bijektivna.*

*(ii) Niz s-ultradistribucija $f^m \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ konvergira prema s-ultradistribuciji $f^0 \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ ako i samo ako*

$$\lim_{m\to\infty} (f^m, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} = (f^0, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \qquad \text{za svako} \quad \varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega).$$

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati samo prvi deo tvrdnje $(i)$.

Razgledajmo lokalno finitni pokrivač skupa $\Omega$ koji se sastoji od ograničenih otvorenih podskupova $\Omega_i$ i $\widetilde{\Omega}_i$ skupa $\Omega$ tako da $\overline{\Omega}_i \subset\subset \widetilde{\Omega}_i$ i neka funkcije $\varphi_i \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ formiraju particiju jedinice za $i \in \mathbb{Z}_+$, t.j. $\varphi_i(x) = 1$ ako $x \in \Omega_i$ i $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \widetilde{\Omega}_i$ za $i \in \mathbb{Z}_+$. Ako je $T$ neprekidan linearni funkcional na $\mathscr{D}^*(\Omega)$, tada su $T_i$, definisani sa $T_i(\psi) = T(\varphi_i \psi)$ za $\psi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$, neprekidni linearni funkcionali na $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$.

Na osnovu Leme 3.4.25 i Teoreme 3.5.3, postoji niz $t$-ultradistribucija $(f^i)$ tako da $f^i \in \mathscr{T}^* \cong \widetilde{\mathscr{T}^*}$ i $T_i(\psi) = (f^i, \psi)_{\mathscr{T}^*}$ u smislu (3.4.10) i $T_i(\psi) = (f^i, \psi)_{\widetilde{\mathscr{T}}^*}$ u smislu (3.4.11) za $\psi \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i $i \in \mathbb{N}$. Od Posledice 3.6.2, svaki $f^i$ se može prikazati u obliku $f^i = [(f^i_n)_n] \in \mathscr{U}^*(\mathbb{R}^d)$, gde

$$f^i_n = P_i(D) F^i_n \ \ (n \in \mathbb{Z}_+), \quad F^i_n \xrightarrow{\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)} F^i \ \text{kada}\, n \to \infty, \quad \operatorname{supp} F^i_n \subset \widetilde{\Omega}_i \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$$

za neko $P_i \in \mathcal{P}^*$ i funkcije $F^i_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ koji imaju odgovarajuće osobine

Fiksiramo par različitih indeksa $i, j$ tako da $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$. Tada imamo

$$T(\varphi) = (f^i, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} = (f^j, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)} \qquad \text{za } \ \varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega_i \cap \Omega_j).$$

Posmatramo $f^i - f^j \in \mathscr{U}^*(\mathbb{R}^d)$ kao $s$-ultradistribuciju ograničenu na $\Omega_i \cap \Omega_j$. Postoji $s$-fundamentalan niz koji se sastoji od glatkih funkcija $r^{i,j}_n$ tako da

$$f^i - f^j = [(r^{i,j}_n)_n] \text{ na } \Omega_i \cap \Omega_j.$$

Ovo znači da $f^i - f^j = [(r_n^{i,j})_n]$, gde $r_n^{i,j}$ su glatke funkcije sa $\operatorname{supp} r_n^{i,j} \subset \widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j$ tako da za svaki $K \subset\subset \Omega_i \cap \Omega_j$ imamo $r_n^{i,j} = P_{i,j}(D) R_n^{i,j}$ nad $K$ za neki $P_{i,j} \in \mathcal{P}^*$ i funkcije $R_n^{i,j}$ za $n \in \mathbb{Z}_+$; i štaviše $R_n^{i,j} \to 0$ uniformno na $K$ kada $n \to \infty$. Prema Propoziciji 3.2.6, imamo $f^i = f^j$ na $\Omega_i \cap \Omega_j$. Kako posmatrani pokrivač skupa $\Omega$ je lokalno finitan, možemo definisati

$$f := \sum_{i \in \mathbb{N}} f^i \varphi_i \in \mathscr{U}^*(\Omega) \quad \text{sa} \quad f|\Omega_i = f^i \quad (i \in \mathbb{Z}_+). \tag{3.6.2}$$

Prema tome, $T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)}$ za $\varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega)$ (videti (3.3.3)).

Ako pretpostavimo da $T(\varphi) = (f^1, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)}$ i $T(\varphi) = (f^2, \varphi)_{\mathscr{U}^*(\Omega)}$ za $f^1, f^2 \in \mathscr{U}^*(\Omega)$ i za $\varphi \in \mathscr{D}^*(\Omega)$. Neka $f^1 - f^2 = [g_n]$, gde $(g_n)$ je $s$-fundamentalan niz oblika $g_n = P(D)(G_n)$ na $K \subset\subset \Omega$ za odgovarajuće $P$ and $G_n$. Prema (3.3.3), imamo

$$\lim_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} P(D)(G_n) = 0 \text{ na } \Omega.$$

Znači, na bazi Propozicije 3.2.6, važi $f^1 - f^2 = [g_n] = 0$, pa $s$-ultradistribucija $f$ definisana u (3.6.2) je jedinstvena. $\square$

# Glava 4

# Sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija

## 4.1 Uvod

U ovom delu uvodimo koncept $s$-$p$-fundamentalnih nizova glatkih periodičnih funkcija. Oni formiraju klase ekvivalencije koje nazivamo periodične $s$-ultradistribucije. Prostori kojih formiraju ove klase ćemo označavati sa $\mathscr{U}'^{*}_{per}$, gde $* = (p!^t)$ ili $* = \{p!^t\}$, za neko $t > 1$. Pokazaćemo da postoji izomorfizam između prostora $\mathscr{U}'^{*}_{per}$ i $\mathscr{A}'^{*}_{per}$, gde $\mathscr{A}'^{(t)}_{per}$ i $\mathscr{A}'^{\{t\}}_{per}$ su prostori periodičnih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea.

Periodične ultradistribucije su obopštenje periodičnih distribucija. Prostori periodičnih ultradistribucija $\mathscr{A}'^{(t)}_{per}$ i $\mathscr{A}'^{\{t\}}_{per}$ tipa Berlinga i Rumijea su izučavani zadnjih 30 godina prošlog stoljeća. Neki radovi u kojima se razrađuje ta problematika su [23, 24, 64, 97], dok neke knjige su [3, 36, 103]. Mi ćemo koristiti sekvencijalni pristup teoriji periodičnih ultradistribucija tipa Berlinga i Rumijea koji je uveden u [14].

Definišemo periodične $s$-ultadistribucije kao klase ekvivalencije $s$-$p$-fundamentalnih nizova koji su definisani preko nizova glatkih periodičnih funkcija ali umesto diferencijalne operatore koristimo ultradiferencijalne operatore.

Navešćemo osnovne operacije sa periodičnim $s$-ultradistribucijama kao što su sabiranje, množenje skalarom, diferenciranje i množenje glatkom funkcijom iz $\mathcal{E}^*$. Definisaćemo konvergenciju u ovakvim prostorima, kao i sekvencijalnu neprekidnost periodičnih $s$-ultradistribucija. Na kraju, u Teoremi 4.6.4 ćemo pokazati da je sekvencijalni pristup periodičnim ultradistribucijama ekvivalentan standardnom pristupu. Da bismo to pokazali, prisetimo se nekih poznatih definicija i tvrđenja.

Od sada, kada kažemo glatka periodična funkcija u $\mathbb{R}^d$, zapravo podrazumevamo glatke periodične funkcije na intervalu $I_0 = (0, 2\pi)^d$. Sa $I$ ćemo označavati $[0, 2\pi]^d$. Prostor $\mathscr{A}_{per}$ se sastoji od elemenata iz prostora $\mathscr{L}^2(I_0) \cap \mathscr{C}^\infty(I_0)$ za koje je

$$\gamma_n(\varphi) := \sup_{|k| \le n} \|D^k \varphi\|_2 < \infty, \ n \in \mathbb{N}, \quad (\|\varphi\|_2 = \left( \int_{I_0} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}).$$

Koristeći [64], prisetimo se definicije sledećih prostora:

$$\mathscr{A}_{per}^{t,h} = \{\varphi \in \mathscr{A}_{per} : \ \|\varphi\|_{h,2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{\|\varphi^{(k)}\|_2}{h^{|k|} k!^t} < \infty\}$$
$$\mathscr{A}_{per}^{(t)} = \varprojlim_{h \to 0} \mathscr{A}_{per}^{t,h} \qquad \mathscr{A}_{per}^{\{t\}} = \varinjlim_{h \to \infty} \mathscr{A}_{per}^{t,h}.$$

Oba prostora, koja nazivamo prostorima ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija, ćemo definisati sa $\mathscr{A}_{per}^*$ gde, kao i ranije, * predstavlja $(t)$ ako je u pitanju Berlingov slučaj, odnosno $\{t\}$ u Rumijeovom slučaju. Duale ovih prostora, koje nazivamo prostorima periodičnih ultradistribucija, označavamo sa $\mathscr{A}'^*_{per}$. Za $f \in \mathscr{A}_{per}^*$, njeni Furijeovi koeficijenti su definisani sa

$$c_n = \int_{I_0} f(x) e_{-n}(x) dx = (f, e_n)_{\mathscr{L}^2(I_0)}, n \in \mathbb{Z}^d, \text{ gde je } e_n(x) = e^{\mathrm{i}\langle n, x \rangle}.$$

U ovoj glavi ćemo sa $\delta_n = n^d \varphi(n \cdot), n \in \mathbb{N}$, označavati delta niz u $\mathscr{A}'^*_{per}$, gde $\varphi \in \mathscr{A}_{per}^*$ i $\varphi = 1$ na $B(0, \pi)$, $\varphi = 0$ izvan $B(0, 2\pi)$. Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza (dokaz sledi iz definicije, videti [23], [24], [64]).

**Lema 4.1.1.** *(a) $\varphi \in \mathscr{A}_{per}^*$ ako i samo ako za sve $P \in \mathcal{P}^*$ važi*

$$\gamma_P(\varphi) = \|P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

*(b) Ako $\varphi_n, \ \varphi \in \mathscr{A}_{per}^*$ i ako $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{A}_{per}^*} \varphi$, $n \to \infty$, tada*

$$P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{A}_{per}^*} P(-D)\varphi, \ n \to \infty.$$

## 4.2 Fundamentalni nizovi periodičnih $s$-ultradistribucija

Definicija periodičnih ultradistribucija je slična onoj kod periodičnih distribucija. Vršimo analogne promene koje odgovaraju na karakteristike ultradistribucija.

**Definicija 4.2.1.** *Niz $(f_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija je s-p-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ ako postoji niz $(F_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, periodična funkcija $F \in \mathscr{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:*

$$f_n = P(D)F_n \text{ u } \mathbb{R}^d \quad \text{i } F_n \xrightarrow{I} F, \ n \to \infty. \tag{4.2.1}$$

Delovanje operatora $P(D)$ u (4.2.1) podrazumeva postojanje granične vrednosti

$$\lim_{k\to\infty} P_k(D)F_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha F_n(x) = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.2.2}$$

**Definicija 4.2.2.** *s-p-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\overset{p}{\sim}$, i pišemo*

$$(f_n)_n \overset{p}{\sim} (g_n)_n,$$

*ako postoje nizovi $(F_n)_n$ i $(G_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:*

$$f_n = P(D)F_n, \ \ g_n = P(D)G_n \text{ u } \mathbb{R}^d, \ F_n - G_n \xrightarrow{I} 0, \ n \to \infty.$$

Iz Definicije 4.2.2 direktno sledi:

**Propozicija 4.2.3.** *s-p-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\overset{p}{\sim}$ ako je niz*

$$f_1, \ g_1, \ f_2, \ g_2, \dots$$

*fundamentalan u $\mathbb{R}^d$.*

Sledeća propozicija biće korišćena u nastavku. Mi ćemo formulisati i dokazati samo Rumijeov slučaj. Berlingov slučaj dokazuje se analogno.

**Propozicija 4.2.4.** *Ako postoje: ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, glatke periodične funkcije $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_{k,n} e_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$ u $\mathbb{R}^d$, periodična funkcija $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathscr{L}^2(I_0)$, takvi da $F_n \xrightarrow{I} F$ i $P_{r_p}(D)F_n \xrightarrow{I} 0$ kad $n \to \infty$, tada je $F = 0$ u $\mathbb{R}^d$. U specijalnom slučaju, ako je $F$ periodična glatka funcija i ako je $P_{r_p}(D)F = 0$, tada je $F = 0$ u $\mathbb{R}^d$.*

*Dokaz.* Iz

$$P_{r_p}(D)F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(k) b_{k,n} e_k \xrightarrow{I} 0, n \to \infty,$$

dobijamo da $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \xrightarrow{\ell^2} 0, n \to \infty$. Kako $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \to (b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u $\ell^2$ kad $n \to \infty$ imamo $F = 0$ nad svakim periodom $I_0$. Kako je $F$ periodična funkcija, tada je $F = 0$ na $\mathbb{R}^d$. □

Osnovna teorema je sledeća:

**Teorema 4.2.5.** *Relacija $\overset{p}{\sim}$ je relacija ekvivalencije.*

*Dokaz.* Ako je niz $(f_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija $s$-$p$-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$, onda je niz

$$f_1,\ f_1,\ f_2,\ f_2, \ldots$$

fundamentalan i važi

$$(f_n)_n \overset{p}{\sim} (f_n)_n,$$

t.j. relacija $\overset{p}{\sim}$ je refleksivna.

Relacija $\overset{p}{\sim}$ je simetrična jer ako je fundamentalan niz

$$f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2, \ldots,$$

m tada fundamentalan je i niz

$$g_1,\ f_1,\ g_2,\ f_2, \ldots.$$

Dokaz tranzitivnosti je malo komplikovaniji. Svaka glatka periodična funkcija je $\mathscr{L}^2$ funkcija na svom periodu i ona se može razviti u Furijeov red.

**Lema 4.2.6.** *Neka ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, nizovi $(\widetilde{F}_n)_n$, $(\widetilde{\widetilde{F}}_n)_n$, glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$ i periodične funkcije $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}} \in \mathscr{L}^2(I_0)$ ispunjavaju uslove Definicije 4.2.1, tj.*

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n,\ f_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n \text{ u } \mathbb{R}^d,\quad \widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ \widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty,$$

*gde su*

$$\widetilde{F}_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_{k,n}e_k,\ \widetilde{\widetilde{F}}_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n}e_k,\ \widetilde{F}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_ke_k,\ \widetilde{\widetilde{F}}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widetilde{c}}_ke_k$$

$(\widetilde{c}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{c}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{\widetilde{c}}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\in\ell^2$, $n\in\mathbb{Z}_+$. *Tada postoji ultradiferencijalni operator* $P_{r_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$ *za koji je*

$$\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}^d},\ \left(\frac{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}\in\ell^\infty, \tag{4.2.3}$$

*glatke periodične funkcije*

$$F_{n,1}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\quad F_{n,2}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n}P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\ n\in\mathbb{Z}_+,$$

*i periodične funkcije*

$$F_1=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_kP_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\qquad F_2=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_kP_{\widetilde{\widetilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k\in\mathscr{L}^2(I_0)$$

*tave da važi*

$$f_n=P_{r_p}(D)F_{n,1}=P_{r_p}(D)F_{n,2}\ u\ \mathbb{R}^d,\quad F_{n,1}\xrightarrow{I}F_1,\ F_{n,2}\xrightarrow{I}F_2,\ n\to\infty.$$

*Štaviše,* $F_1=F_2$ *u* $\mathbb{R}^d$.
*Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju, uz odgovarajaću notaciju.*

*Dokaz.* Kako je

$$D^\alpha e_k=k^\alpha e_k,\alpha\in\mathbb{Z}^d_+,\ k\in\mathbb{Z}^d,$$

tada iz (4.2.3) sledi

$$F_{n,1}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_{k,n}\frac{P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k=P_{\widetilde{r}_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k,\ n\in\mathbb{N}.$$

Dalje,

$$P_{r_p}(D)F_{n,1}=P_{r_p}(D)P_{\widetilde{r}_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{\widetilde{r}_p}(D)P_{r_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k \\
&= P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n = f_n \quad \text{u } \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

Na sličan način se može poikazati da je $f_n = P_{r_p}(D)F_{n,2}$.

Iz (4.2.3) sledi da su $F_{n,i}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1,2$, glatke periodične funkcije u $\mathbb{R}^d$ i $F_i \in \mathscr{L}^2(I_0)$, $i = 1,2$. Kako $(\widetilde{c}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{c}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ i $(\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{\widetilde{c}}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u $\ell^2$ kad $n\to\infty$, tada $F_{n,i} \xrightarrow{I} F_i$, $n\to\infty$, $i=1,2$. Iz Propozicije 4.2.4 sledi da je $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. □

(Nastavak dokaza Teoreme 4.2.5) Tvrđenje ćemo pokazati samo u Rumijeovom slučaju. Neka je $(f_n)_n \overset{p}{\sim} (g_n)_n$ i $(g_n)_n \overset{p}{\sim} (h_n)_n$. Tada na osnovu Definicije 4.2.2 postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, $(\widetilde{G}_n)_n$, $(H_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$
\begin{aligned}
&f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n,\ g_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)G_n \ \text{ u } \mathbb{R}^d,\ F_n - G_n \xrightarrow{I} 0,\ n\to\infty,\\
&g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{G}_n,\ h_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)H_n \ \text{ u } \mathbb{R}^d,\ G_n - H_n \xrightarrow{I} 0,\ n\to\infty.
\end{aligned}
$$

Iz Leme 4.2.6 sledi da nizove $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ i $(h_n)_n$ možemo zapisati, korišćenjem operatora $P_{r_p}(D)$ umesto $P_{\widetilde{r}_p}(D)$ i $P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)$, u obliku:

$$
f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)G_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)\widetilde{G}_{n,1},\ h_n = P_{r_p}(D)H_{n,1} \text{ u } \mathbb{R}^d
$$

i važi

$$
F_{n,1} - G_{n,1} \xrightarrow{I} 0,\ \widetilde{H}_{n,1} = G_{n,1} - \widetilde{G}_{n,1} + H_{n,1},\ G_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{I} 0
$$

i $F_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{I} 0,\ n\to\infty$. Ovim je dokazana tranzitivnost. □

Prema tome skup svih $s$-$p$-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ možemo podeliti na klasama ekvivalencije u odnosu na relaciju $\overset{p}{\sim}$.

**Definicija 4.2.7.** *Klase ekvivalencije $s$-$p$-fundamentalnih nizova, u oznaci $f = [(f_n)_n] = [f_n]$, nazivaju se periodične $s$-ultradistribucije. Prostor periodičnih $s$-ultradistribucija označavamo sa $\mathscr{U}'^{*}_{per} = \mathscr{U}'^{*}_{per}(\mathbb{R}^d)$.*

*Primedba* 4.2.8. Na bazi (4.2.3) i Propozicije 4.2.4 imamo da je $f = [f_n] = 0$ ako je $f_n = P(D)F_n$ i ako $F_n \xrightarrow{I} 0$, $n\to\infty$.

**Primer 4.2.9.** *Neka je* $f = [(f_n)_n] \in \mathscr{U}'^{*}_{per}$ *oblika* $f_n = P(D)F_n$ *u* $\mathbb{R}^d$ *gde* $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \to \infty$. *Tada je niz* $(\widetilde{f}_n)_n = (P(D)(F_n * \delta_n))_n$ *s-p-fundamentalan u* $\mathbb{R}^d$ *i* $(f_n)_n \overset{p}{\sim} (\widetilde{f}_n)_n$.

## 4.3 Operacije sa periodičnim $s$-ultradistribucijama

U prostoru periodičnih $s$–ultradistribucija mogu se definisati standardne operacije za vektorske prostore.

**Teorema 4.3.1.** $\mathscr{U}'^{*}_{per}$ *je linearan vektorski prostor.*

Neka su $f = [f_n]$, $g = [g_n] \in \mathscr{U}'^{*}_{per}$. Suma periodičnih $s$-ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je periodična $s$-ultradistribucija

$$f + g := [f_n + g_n].$$

Isto se može uraditi i za proizvod sa skalarom

$$\lambda f := [\lambda f_n].$$

Koristeći Lemu 4.2.6, na sličan način kao kod $s$-ultradistribucija može se proveriti konzistentnost ovih definicija.

**Teorema 4.3.2.** *Za proizvoljnu* $f = [f_n] \in \mathscr{U}'^{\{t\}}_{per}$ *i* $\beta \in \mathbb{Z}^d_+$ *operacija diferenciranja*

$$f^{(\beta)} := [f_n^{(\beta)}]$$

*je dobro definisana.*

*Dokaz.* Daćemo dokaz u Rumijeovom slučaju. Dovoljno je da pokažemo da je niz $(f^{(\beta)})_n$ $s$-$p$-fundamentalan. Tada na osnovu Definicije 4.2.2 postoji niz $(F_n)_n, n \in \mathbb{Z}_+$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, periodična funkcija $F \in \mathscr{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_n \ \text{ nad } \mathbb{R}^d, \ F_n \xrightarrow{I} F, \ n \to \infty,$$

Iz uslova $f_n^{(\beta)} = P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}$ nad $\mathbb{R}^d$, gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n}e_k$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \to \infty$, i $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$. Na bazi Leme 4.2.6 sledi da postoje:

niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$ i periodična funkcija $\widetilde{F}$ iz $\mathscr{L}^2(I_0)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k) c_{k,n}}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k,\ n \in \mathbb{N}, \qquad \widetilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k) c_k}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k,$$

kao i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p}(D) \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da važi

$$P_{r_p}(D) F_n^{(\beta)} = P_{\widetilde{r}_p}(D) \widetilde{F}_n, \ \text{ nad } \mathbb{R}^d, \ \ \widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ n \to \infty.$$

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju. □

**Teorema 4.3.3.** *Ako je $f = [f_n] \in \mathscr{U}'^*_{per}$ proizvoljna i $\omega \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, tada je proizvod*

$$\omega f := [\omega f_n]$$

*dobro definisan.takođe s-p-fundamentalan.*

*Dokaz.* Daćemo dokaz u Rumijeovom slučaju. Iz uslova, postoje niz glatkih periodičnih funkcija $(F_n)_n$, gde su $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k,\ n \in \mathbb{Z}_+$, funkcija $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k \in \mathscr{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da

$$\omega f_n = \omega P_{r_p}(D) F_n \text{ nad } \mathbb{R}^d \ \text{ i } F_n \xrightarrow{I} F,\ n \to \infty.$$

Dalje, možemo pretpostaviti da je $\omega = \omega\gamma$, gde je $\gamma$ funkcija sečenja koja ima vrednost 1 na $I$ i $\omega = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k$. Na osnovu Leme 4.2.6 postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$ i periodična funkcija $\widetilde{F} \in \mathscr{L}^2(I_0)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k,\ \text{nad } \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N}; \quad \widetilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k,\ \text{nad } \mathbb{R}^d,$$

gde su

$$a_{k,n} = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_{i,n} b_{k-i} \quad \text{i} \quad a_k = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_i b_{k-i}$$

i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da važi

$$P_{r_p}(D) F_n(x) = P_{\widetilde{r}_p}(D) \widetilde{F}_n(x),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $(c_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \to (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u $\ell^2$ kad $n \to \infty$, iz (4.2.3) sledi $\widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ n \to \infty$. Dokaz u Berlingovom slučaju je isti. Dakle, niz $(\omega f_n)_n$ je $s$-$p$-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$. □

## 4.4 Nizovi periodičnih $s$-ultradistribucija

**Definicija 4.4.1.** *Niz periodičnih s-ultradistribucija* $(f^n)_n = ([f^n_m])_n$ *konvergira ka periodičnoj s-ultradistribuciji* $f = [f_m]$, $n \to \infty$, *i koristimo oznaku*

$$f^n \xrightarrow{s\text{-}p} f,\ n \to \infty, \quad \textit{ili} \quad p\text{-}\lim_{n\to\infty} f^n = f,$$

*ako postoje nizovi* $(F^n_m)_m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $(F_m)_m$ *glatkih periodičnih funkcija u* $\mathbb{R}^d$, *niz* $(F^n)_n$ *periodičnih funkcija* $F^n \in \mathscr{L}^2(I_0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *periodična funkcija* $F \in \mathscr{L}^2(I_0)$ *i ultradiferencijalni operator* $P \in \mathcal{P}^*$ *takvi da:*

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P(D)F^n_m,\ f_m = P(D)F_m \ \textit{u}\ \mathbb{R}^d, m, n \in \mathbb{N},\\
&F^n_m \xrightarrow{I} F_m,\ n \to \infty,\ \textit{uniformno po}\ m \in \mathbb{N},\ F_m \xrightarrow{I} F,\ m \to \infty,\\
&F^n_m \xrightarrow{I} F^n,\ m \to \infty,\ \textit{za svako}\ n \in \mathbb{N}\ \textit{i}\ \ F^n \xrightarrow{I} F,\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Zbog uniformne konvergencije možemo da promenimo redosled limesa, pa imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} F^n_m = \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} F^n_m \in \mathscr{L}^2(I_0)$.

**Teorema 4.4.2.** *Ako postoji* $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f^n$, *tada je on jedinstven.*

*Dokaz.* Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju. Prepostavimo da $f^n \xrightarrow{s\text{-}p} f$ i $f^n \xrightarrow{s\text{-}p} g$ u $\mathbb{R}^d$, $n \to \infty$ i pokažimo da je $f = g$. Iz Definicije 4.4.1 sledi da postoje: nizovi $(F^n_m)_m$, $(\widetilde{F^n_m})_m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $(F_m)_m$, $(\widetilde{F}_m)_m$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, nizovi $(F^n)_n$, $(\widetilde{F^n})_n$ periodičnih funkcija iz $\mathscr{L}^2(I_0)$, periodične funkcije $F$, $\widetilde{F} \in \mathscr{L}^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}^n_m,\ f_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_m \text{ nad } \mathbb{R}^d,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{I} \widetilde{F}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+ \widetilde{F}_m \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ m \to \infty,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{I} \widetilde{F}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve } n \in \mathbb{Z}_+ \ \text{ i } \widetilde{F}^n \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ n \to \infty,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F^n_m}},\ f_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_m \text{ u } \mathbb{R}^d,\\
&\widetilde{\widetilde{F^n_m}} \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{F}}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N}\ ,\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{F}},\ m \to \infty,
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}{}^n_m \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{\widetilde{F}}}{}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve } n \in \mathbb{N} \ \text{ i } \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty.$$

Sličan kao u Propoziciju **??**, pomoću Leme 4.2.6, možemo konstruisati nizove glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$ $(F^n_{m,1})_m$, $(F^n_{m,2})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$, nizove periodičnih funkcija iz $\mathscr{L}^2(I_0)$ $(F^n_1)_n$, $(F^n_2)_n$, periodične funkcije $F_1$, $F_2 \in \mathscr{L}^2(I_0)$ i $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da:

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P_{r_p}(D)F^n_{m,1} = P_{r_p}(D)F^n_{m,2},\ f_m = P_{r_p}(D)F_{m,1},\ g_m = P_{r_p}(D)F_{m,2} \text{ u } \mathbb{R}^d,\\
&F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{I} F_{m,1} - F_{m,2},\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\\
&F_{m,1} - F_{m,2} \xrightarrow{I} F_1 - F_2,\ m \to \infty,\ F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{I} F^n_1 - F^n_2,\ m \to \infty,\\
&\ \text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i } F^n_1 - F^n_2 \xrightarrow{I} F_1 - F_2,\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Kako je

$$P_{r_p}(D)(F_{m,2} - F_{m,1}) = \lim_{n\to\infty} P_{r_p}(D)(F^n_{m,1} - F^n_{m,2} - F_{m,1} + F_{m,2}) = 0 \text{ nad } \mathbb{R}^d, m \in \mathbb{N},$$

iz Propozicije 4.2.4 dobijamo $F_1 = F_2$ nad $\mathbb{R}^d$. Dakle, $f = g$ nad $\mathbb{R}^d$. $\square$

## 4.5 Periodične $s$-ultradistribucije kao funkcionali

Neka je $\varphi \in \mathscr{A}^*_{per}$ i neka za niz $f = [f_n]$ važi (4.2.1). Definišimo delovanje

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}},$$

sa

$$(f, \varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}} = \lim_{n\to\infty} \int_{I_0} f_n \overline{\varphi} dx = \int_{I_0} F P(-D) \overline{\varphi} dx = (F, P(-D)\varphi)_{\mathscr{L}^2(I_0)}, \tag{4.5.1}$$

gde $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \to \infty$. Dakle, na osnovu (4.5.1) možemo identifikovati $f = [f_n]$ sa $f = P(D)F$. Pokažimo konzistentnost ove definicije.
Ako

$$f_n = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n \ \text{ nad } \mathbb{R}^d;\ \widetilde{F}_n \xrightarrow{I} \widetilde{F},\ n \to \infty,$$

$$f_n = \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n \ \text{ nad } \mathbb{R}^d;\ \ \widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{I} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty,$$

tada parcijalnom integracijom dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_0} f_n\overline{\varphi}dx = \int_{I_0}\widetilde{F}\widetilde{P}(-D)\overline{\varphi}dx = \int_{I_0}\widetilde{\widetilde{F}}\widetilde{\widetilde{P}}(-D)\overline{\varphi}dx,$$

jer mešoviti niz integrala

$$\int_{I_0}\widetilde{P}(D)\widetilde{F}_1\overline{\varphi}dx,\ \int_{I_0}\widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_1\overline{\varphi}dx,\ \int_{I_0}\widetilde{P}(D)\widetilde{F}_2\overline{\varphi}dx,\ \int_{I_0}\widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_2\overline{\varphi}dx,\dots$$

konvergira. Iz Leme 4.1.1 je $\varphi\mapsto f(\varphi)=(f,\varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}}$ linearno preslikavanje.

Sekvencijalna neprekidnost je data u sledećoj teoremi.

**Teorema 4.5.1.** *(a) Ako je* $f=[f_m]\in\mathscr{U}'^*_{per}, m\in\mathbb{Z}_+$, *i ako su* $\varphi_n\in\mathscr{A}^*_{per}, n\in\mathbb{Z}_+$, $\varphi\in\mathscr{A}^*_{per}$ *takvi da* $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{A}^*_{per}}\varphi$, $n\to\infty$, *tada* $(f,\varphi_n)_{\mathscr{U}'^*_{per}}\to(f,\varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}}$, $n\to\infty$.

*(b) Ako* $(f^n=[f^n_m])_n\xrightarrow{s\text{-}p} f=[f_m]$ *i ako* $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{A}^*_{per}}\varphi$, *kad* $n\to\infty$, *tada*

$$(f^n,\varphi_n)_{\mathscr{U}'^*_{per}}\to(f,\varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}},\ n\to\infty.$$

*Dokaz.* (a) Na osnovu (4.2.1) i (4.5.1) imamo

$$(f,\varphi_n)_{\mathscr{U}'^*_{per}}=(F,P(-D)\varphi_n)_{\mathscr{L}^2(I_0)},\ n\in\mathbb{Z}_+.$$

Tada iz Leme 4.1.1 (b) i

$$\begin{aligned}|(f,\varphi_n)_{\mathscr{U}'^*_{per}}-(f,\varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}}| &= |(F,P(-D)(\varphi_n-\varphi))_{\mathscr{L}^2(I_0)}|\\ &\le \|F\|_2\|P(-D)(\varphi_n-\varphi)\|_2\\ &\le C\|P(-D)(\varphi_n-\varphi)\|_2.\end{aligned}$$

(b) Iz Definicije 4.4.1 imamo

$$\lim_{n\to\infty}(f^n,\varphi_n)_{\mathscr{U}'^*_{per}}=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(F^n_m,P(-D)\varphi_n)_{\mathscr{L}^2(I_0)},$$

gde $F^n_m\xrightarrow{I}F^n$, $m\to\infty$, za sve $n\in\mathbb{Z}_+$ i $F^n\xrightarrow{I}F$ kad $n\to\infty$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}|(F^n,\varphi_n)_{\mathscr{L}^2}-(F,\varphi)_{\mathscr{L}^2}| &\le |(F^n,P(-D)(\varphi_n-\varphi))_{\mathscr{L}^2(I_0)}|\\ &\quad+|(F^n-F,P(-D)\varphi)_{\mathscr{L}^2(I_0)}|\\ &\le \|F^n\|_2\|P(-D)(\varphi_n-\varphi)\|_2+\|F^n-F\|_2\|P(-D)\varphi\|_2.\end{aligned}$$

I na kraju, iz Leme 4.1.1 (b) sledi tvrđenje. □

**Lema 4.5.2.** *$f \in \mathscr{A}'^{*}_{per}$ ako i samo ako postoji $F \in \mathscr{L}^2(I_0) \cap \mathscr{C}^\infty(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi $f = P(D)F$, tj.*

$$(f,\varphi)_{\mathscr{A}'^{*}_{per}} = \int_{I_0} F(x)P(-D)\overline{\varphi}(x)dx, \quad \varphi \in \mathscr{A}^{*}_{per}. \tag{4.5.2}$$

Dokaz Leme 4.5.2 je posledica teoreme o reprezentaciji (videti [64]) i tvrđenja (a) i (b) Leme 4.1.1.

## 4.6 Veza između klasičnih i periodičnih $s$-ultradistribucija

Posmatrajmo funkcije oblika $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k \in \mathscr{L}^2(I_0) \cap \mathscr{C}^\infty(I_0)$ i označimo sa $\mathbf{u}^*$ prostor nizova oblika $(r_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ za koje važi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} P^2(k) r_k^2 < \infty \;\text{ za sve } P \in \mathcal{P}_u^*.$$

Jasno je da je ovaj uslov ekvivalentan sa

$$(\forall h>0)(\text{resp. } \exists h>0) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty. \tag{4.6.1}$$

U Rumijeovom slučaju imamo još jednu ekvivalentnu definiciju:

$$(\exists (r_p)_p \in \mathscr{R}) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{c(|k|)^{1/t}} < \infty, \tag{4.6.2}$$

gde je $c$ funkcija koja odgovara nizu $(r_p)_p \in \mathcal{R}$.

Pretpostavimo da važi (4.2.1). Tada, korištenjem (4.5.1) svakom elementu $f \in \mathscr{U}'^{*}_{per}$ odgovara niz $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ sa odgovarajućim ograničenjem. Dakle, imamo

$$(f,\varphi)_{\mathscr{U}'^{*}_{per}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} P(k) \int_{I_0} e_k \overline{\varphi} dx \tag{4.6.3}$$

gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty,\ n \in \mathbb{Z}_+$. Kako

$$(c_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \xrightarrow{\ell^2} (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}, n \to \infty,$$

i $\varphi = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k$, tada je

$$(f, \varphi)_{\mathscr{U}'^*_{per}} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k P(k) r_k, \tag{4.6.4}$$

gde znamo da uslovi (4.6.1) i (4.6.2) vrede za sve $(r_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbf{u}^*$. Ovim smo dodelili periodičnoj $s$-ultradistribuciji $f$ niz oblika

$$(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} = (P(k)c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Označimo sa $\mathbf{u}'^*$ prostor nizova definisan na sledeći način:

$$\mathbf{u}'^* = \{(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} : b_k = P(k)c_k \text{ za neko } P \in \mathcal{P}^*_u \text{ i } (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2\}.$$

**Propozicija 4.6.1.** *Postoji linearna bijekcija* $B : \mathscr{U}'^*_{per} \to \mathbf{u}'^*$.

*Dokaz.* Ako je $f \in \mathscr{U}'^*_{per}$ određena sa $(F_n)_n$ $F$ i $P(D)$, $F_n \xrightarrow{I} F$, $n \to \infty$, gde je $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, tada definišimo

$$B(f) := (b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Iz Leme 4.2.6 sledi da različite reprezentacije od $f$ opet daju isti niz. Lako se pokazuje da je $B$ linearno i bijektivno preslikavanje. □

Sledeća propozicija direktno sledi iz (3.1.4) i (3.1.6).

**Propozicija 4.6.2.** (*a*) *Niz* $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \boldsymbol{u}'^*$ *ako i samo ako* $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}}$ $< \infty$ *za neko (resp. za svako)* $h > 0$.
(*b*) *Niz* $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \boldsymbol{u}'^*$ *ako i samo ako za neko* $h > 0$ *postoji* $C > 0$ *(resp. za sve* $h > 0$ *postoji* $C > 0$*) tako da* $|b_k| \leq Ce^{h|k|^{1/t}}$.

*Primedba* 4.6.3. Primetimo da u Rumijeovom slučaju imamo ekvivalentno tvrđenje prethodnom: Uslovi Propozicije 4.6.2 važe i sa procenom (4.6.2).

U [24] je dokazano da prostori nizova

$$\mathbf{a}^* = \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \text{ za sve (resp. postoji) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty\},$$

$$\mathbf{a}'^* = \{(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \text{ postoji (resp. za sve) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty\}$$

sa njihovim strukturama konvergencije formiraju dualni par. Kako je $\mathbf{a}^* \equiv \mathbf{u}^*$, iz Propozicije 4.6.2, imamo $\mathbf{a}^{'*} \equiv \mathbf{u}^{'*}$. U [24] je pokazano da se prostori $\mathbf{a}^*$ i $\mathscr{A}^*_{per}$ mogu identifikovati kroz bijektivni izomorfizam

$$\mathbf{a}^* \ni (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \mapsto \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \in \mathscr{A}^*_{per} \tag{4.6.5}$$

iz kog sledi izomorfizam

$$\mathbf{a}^{'*} \ni (b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \mapsto \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathscr{A}^{'*}_{per},$$

pa, na osnovu Propozicije 4.6.1 sledi da se prostori $\mathbf{a}^{'*}$ i $\mathscr{U}^{'*}_{per}$ mogu identifikovati pomoću njihovih struktura konvergencije.

Pomoću (4.5.2) je definisan linearan funkcional na $\mathscr{A}^*_{per}$ koji je na osnovu Teoreme 4.5.1 sekvencijalno neprekidan. Glavni rezultat u ovoj glavi je sadržan u sledećoj teoremi.

**Teorema 4.6.4.** *(i) Za svaki neprekidan linearan funkcional $U$ u prostoru $\mathscr{A}^*_{per}$ postoji jedinstvena periodična s-ultradistibucija $f \in \mathscr{U}^{'*}_{per}$ takva da važi*

$$U(\varphi) = (f,\varphi)_{\mathscr{U}^{'*}_{per}}, \qquad \text{za sve } \ \varphi \in \mathscr{A}^*_{per}. \tag{4.6.6}$$

*gde je $(f,\varphi)_{\mathscr{U}^{'*}_{per}}$ definisan sa (4.5.1).*
*Obratno, za sve $f \in \mathscr{U}^{'*}_{per}$ izraz (4.6.6) definiše linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional na $\mathscr{A}^*_{per}$.*
*(ii) Niz $(f^n)_n \in \mathscr{U}^{'*}_{per}$ konvergira ka $f \in \mathscr{U}^{'*}_{per}$ ako i samo ako za sve $\varphi \in \mathscr{A}^*_{per}$*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(f^n_m,\varphi)_{\mathscr{U}^{'*}_{per}} = (f,\varphi)_{\mathscr{U}^{'*}_{per}}. \tag{4.6.7}$$

*Dokaz.* (i) Neka je $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathscr{A}^{'*}_{per}$. Korištenjem Leme 4.5.2 zaključujemo da

$$F_n = \sum_{|k|\le n} \frac{b_k}{P(k)} e_k,\ k \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_+, \quad F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{P(k)} e_k$$

daju odgovarajući element iz $\mathscr{U}^{'*}_{per}$. Jedinstvenost sledi iz Propozicija 4.2.4 i 4.6.1.

Obratno, neka $f \in \mathscr{U}'^{*}_{per}$. Tada je sa (4.6.3) definisan sekvencijalno neprekidan i linearan funkcional na $\mathscr{A}^{*}_{per}$ jer iz $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{A}^{*}_{per}} \varphi$ sledi $(f, \varphi_n)_{\mathscr{U}'^{*}_{per}} \to (f, \varphi)_{\mathscr{U}'^{*}_{per}}$, $n \to \infty$.

(ii) Dokažimo samo da iz (4.6.7) sledi $f^n \xrightarrow{s-p} f$, $n \to \infty$, jer je implikacija već dokazana u Teoremi 4.5.1 (b). Neka su $F^n_m = \sum\limits_{|k|=-\infty}^{\infty} a^n_{k,m} e_k$, $F_m = \sum\limits_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} e_k$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$ i $F = \sum\limits_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k$ (kao u Definiciji 4.4.1). Iz dualnosti prostora $\mathbf{a}^*$ i $\mathbf{a}'^*$, sledi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a^n_{k,m} r_k \to \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} r_k, \; n \to \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{Z}_+,$$

za sve $\varphi = \sum\limits_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k \in \mathscr{A}^{*}_{per}$. Takođe,

$$(a_{k,m})_{k \in \mathbb{Z}^d} \to (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}, \; m \to \infty, \quad \text{u } \mathbf{a}'^*.$$

Ako se vratimo na oblike funkcija $F^n_m$, $F_m$ i $F$, dobijamo tvrđenje. $\square$

# Glava 5

# Množenje ultradistribucija i talasni front

## 5.1 Uvod

Množenje ultradistribucija je obopštenje problema postojanja multiplikativnog proizvoda dve distribucije. Slično talasnom frontu distribucije može se definisati talasni front ultradistribucije. Jedina razlika je u tome što umesto ograničenje nekim polinomom, sada posmatramo funkcionale koji imaju najviše eksponencijalni rast u beskonačnosti. Takođe, umesto glatkih funkcija sa kompaktnim nosačem koje smo koristili kod mikrolokalizacije distribucije, kod mikrolokalizacije ultradistribucija koristićemo težinske funkcije koje imaju subeksponencijalni rast u beskonačnosti. Imaćemo u vidu posledice tog izbora. Težinske funkcije koje se koriste u proučavanju periodičnih ultradistribucija imaju mnogo slične karakteristike sa težinskim funkcijama koje smo koristili kod periodičnih distribucija. Oni zadovoljavaju i suštinske nejednakosti koje smo koristili kod distribucija.

U ovom delu mi ćemo koristiti osobine proizvoda periodičnih ultradistribucija kako bi dali novi opis talasnog fronta ultradistribucije $f \in \mathscr{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ koristeći koeficijente njenog razvoja u odgovarajućem Furijeovom redu. Nakon toga ćemo proširiti rezultate koji su izloženi u 2.4 na prostorima nekih klasa ultradistribucija. Preciznije, analizirane su mikrolokalne osobine ultradistribucije $f$ u $x_0 \in \mathbb{R}^d$ koje su određene preko razvoja u Furijeov red periodizacije ultradistribucije $\varphi f$, gde $\varphi$ je funkcija odsjecanja u okolini tačke $x_0$. Mi ćemo koristiti rezultate koji su izloženi u nekim od radova i knjiga koji su posvećeni toj problematici: [23, 24, 64].

## 5.2 Teoreme tipa Pejli-Viner–a za ultradistribucije

Teoreme Pejli-Vinera imaju svoj analog kod ultradistribucija. Furijeova transformacija ultradistribucije $f$ je

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}_0 f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle} f(x)dx, \tag{5.2.1}$$

gde $x \in \mathbb{R}^d$ i $\xi \in \mathbb{R}^d$. Ako je $f$ ultradistribucija sa kompaktnim nosačem, tada $\hat{f}$ se može produžiti analitički do celu funkciju na $\mathbb{C}^d$, koja se naziva *Furije-Laplasova transformacija ultradistribucije* $f$. Teoreme tipa Pejli-Viner–a karakterišu ove cele funkcije. Kompleksnu promnljivu iz $\mathbb{C}^d$ ćemo označavati sa $\zeta = \xi + i\eta$, gde $\xi$ i $\eta$ su realni i imaginarni deo promenljive $\zeta$.

Mi ćemo razgledati uslove pod kojih je nosač $f$ sadržan u nekom **konveksnom kompaktnom skupu** $K \subset \mathbb{R}^d$. *Funkcija nosača* $H_K$ na $K$ definiše se kao

$$H_K(\zeta) = \sup_{x\in K} \operatorname{Im} \langle x,\zeta\rangle = \sup_{x\in K} \langle x,\eta\rangle \tag{5.2.2}$$

**Propozicija 5.2.1.** *Ako je $f \in \mathscr{D}'^{*}{}_K$, tada Furije-Laplasova transformacija*

$$\hat{f}(\zeta) = \left\langle e^{-\mathrm{i}\,\langle x,\zeta\rangle}, f\right\rangle \tag{5.2.3}$$

*je cela funkcija.*

**Teorema 5.2.2** (Pejli-Viner)**.** *Neka $K \subset \mathbb{R}^d$ je konveksan kompaktan skup. Potreban i dovoljan uslov da jedna cela funkcija $\hat{\varphi}(\zeta)$ na $\mathbb{C}^d$ bude Furije-Laplasova transformacija od $\varphi \in \mathscr{D}^{*}{}_K$ je to da $\hat{\varphi}(\zeta)$ zadovoljava sledeću nejednakost na $\mathbb{C}^d$:*

*u slučaju Rumijea, $* = (t)$: za svaki $L > 0$, postoji konstanta $C$ tako da*

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C \exp\{-(L|\zeta|)^{1/t} + H_K(\zeta)\}; \tag{5.2.4}$$

*U slučaju Berlinga, $* = \{t\}$: postoje konstante $L$ i $C$ tako da važi* (5.2.4)*.*

*Kada je neki od ovih uslova zadovoljen, $\varphi$ je jednaka inverznoj Furijeovoj transformaciji od $\hat{\varphi}$:*

$$\mathcal{F}_0^{-1}(\hat{\varphi}(x)) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} dj\xi, \tag{5.2.5}$$

*gde*

$$dj\xi = (2\pi)^{-d} d\xi_1 \cdots d\xi_n. \tag{5.2.6}$$

*Štaviše, niz* $\varphi_j \in \mathscr{D}^*{}_K$ *konvergira ka* $0$ *ako i samo ako:*

*u slučaju Rumijea - za svaki* $L > 0$*, niz*

$$\exp\{(L|\zeta|)^{1/t} - H_K(\zeta)\}\hat{\varphi}_j(\zeta) \tag{5.2.7}$$

*konvergira ravnomerno na* $\mathbb{R}^d$ *(ili ekvivalentno na* $\mathbb{C}^d$*);*

*u slučaju Berlinga- za neki* $L > 0$*, niz*

$$\exp\{(L|\zeta|)^{1/t} - H_K(\zeta)\}\hat{\varphi}_j(\zeta) \tag{5.2.8}$$

*konvergira ravnomerno na* $\mathbb{R}^d$ *(ili equivalentno na* $\mathbb{C}^d$*).*

**Teorema 5.2.3** (Pejli-Viner)**.** *[43] Neka je* $K$ *konveksan kompaktan skup u* $\mathbb{R}^d$*. Tada su sledeća tri uslova ekvivalentna za celu funkciju* $\hat{f}(\zeta)$ *na* $\mathbb{C}^d$*:*

*a:* $\hat{f}(\zeta)$ *je Furije-Laplasova transformacija neke* $f \in \mathscr{D}'^*{}_K$*,*

*b:* $(t)$*: postoje konstante* $L$ *i* $C$ *za koje*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C\mathrm{e}^{L|\xi|)^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{5.2.9}$$

$\{t\}$*: za svaki* $L > 0$ *postoji konstanta* $C$ *za koju važi* (5.2.9).

*U svakom od gornjih slučajeva, za proizvoljan* $\varepsilon > 0$*, postoji konstanta* $C_\varepsilon$ *takva da*

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{H_K(\zeta)+\varepsilon|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d. \tag{5.2.10}$$

*c:*

*Slučaj* $(s)$*: Postoje konstante* $L$ *i* $C$ *takve da*

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C\mathrm{e}^{(L|\zeta|)^{1/t}+H_K(\zeta)}, \zeta \in \mathbb{C}^d. \tag{5.2.11}$$

*Slučaj* $\{s\}$*: Za svaki* $L > 0$ *postoji konstanta* $C$*, za koju važi* (5.2.11).

*Preslikavanje koje preslikava* $f \in \mathscr{D}'^*{}_K$ *u njenu Furije-Laplasovu transformaciju* $\hat{f}$ *je injektivno. Štaviše, niz* $f_j \in \mathscr{D}'^*{}_K$ *konvergira ka* $0$ *ako i samo ako u slučaju:*

*Rumijea: za neki* $L > 0$

$$\mathrm{e}^{-(L|\zeta|)^{1/t}-H_K(\zeta)}\hat{f}_j(\zeta) \tag{5.2.12}$$

*konvergira ka* $0$ *ravnomerno na* $\mathbb{R}^d$ *ili ekvivalentno na* $\mathbb{C}^d$*;*

*Berlinga: za svaki* $L > 0$ (5.2.12) *konvergira ka* $0$ *ravnomerno na* $\mathbb{R}^d$ *ili ekvivalentno na* $\mathbb{C}^d$*.*

## 5.3 Prostori periodičnih ultradiferencijabilnih funkcija i ultradistribucija

Koristićemo oznake koje smo uveli ranije i koje koristimo u [14]. Za razliku od Glave 4 gde smo definisali prostore $\mathscr{A}^*_{per}$ periodičnih ultradiferencijalbilnih funkcija Berlingovog i Rumijeovog tipa sa periodom $2\pi$, kao i njihove duale–prostore periodičnih ultradistribucija $\mathscr{A}'^*_{per}$ Berlingovog i Rumijeovog tipa, u ovoj glavi ćemo posmatrati prostore u kojima funkcije i ultradistribucije su sa periodom 1 i koristiti oznaku $\mathscr{P}$ umesto $\mathscr{A}_{per}$. Kao i do sada radimo jedino sa vrednostima parametara $t > 1$. Za $n \in \mathbb{Z}^d$ koristimo $\mathrm{e}_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle x,n\rangle}$.

Prostor periodičnih test funkcija $\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*(\mathbb{R}^d)$ gde $* = (t)$ (resp. $* = \{t\}$), klase Berlinga (resp. Rumijea), sastoji se od svih ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija $\varphi$ klase Berlinga (resp. Rumijea). U [23, 24] je dokazano da je $\varphi$ periodična ultradiferencijabilna funkcija reda $t$ tipa Rumijea $\mathscr{P}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, (resp. tipa Berlinga $\mathscr{P}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$) ako i samo ako

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\varphi_n|^2 \exp(2\alpha^{1/t}|n|^{1/t}) < \infty,$$

postoji (resp. za svako) $\alpha > 0$, gde $\varphi_n = \int_{I_1} \varphi(x)e^{-2\pi\mathrm{i}\langle n,x\rangle}dx, n \in \mathbb{Z}^d$.

Dual prostora $\mathscr{P}^*$, je prostor periodičnih ultradistribucija, kojeg označavamo sa $\mathscr{P}'^*$. Koristimo i drugi rezultat iz [23]: $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_n e_n$ je periodična ultradistribucija reda $s$ tipa Rumijea (Berlinga) ako i samo ako

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |f_n|^2 \exp(-2\alpha^{1/t}|n|^{1/t}) < \infty,$$

za svako (za neko) $\alpha > 0$.

Za $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_n e_n \in (\mathscr{P}^*)'$ i $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varphi_n e_n \in \mathscr{P}^*$ dejstvo ultradistribucije $f$ nad $\varphi$ je: $\langle f, \varphi\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_n\varphi_{-n}$.

Posmatraćemo periodične ekstenzije lokalizacija ultradistribucije u okolini neke tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tj za $f \in \mathscr{D}'^*$, $\mathrm{supp}(f) \subset I_{\eta,x_0} = \prod_{j=1}^d (x_{0,j} - \eta/2, x_{0,j} + \eta/2)$, gde $0 < \eta < 1$, njena periodična ekstenzija je

$$f_p(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(x+n).$$

Neka su $\omega, \nu$ pozitivne funkcije(težine) nad $\mathbb{Z}^d$. Pojmovi submultiplikativna i $\nu$–ograničena funkcija koje su definisani u 2.4 ćemo koristiti i u ovom delu. Za neku submultiplikativnu funkciju $\nu$, skup svih $\nu$-ograničenih težina je $\mathscr{M}_\nu$. Koristićemo oznake iz [34]:

$$\mathscr{M}_{(t)}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathscr{M}_\nu : (\exists C > 0)(\forall k > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}^d)(\nu(n) \le Ce^{k|n|^{1/t}})\}.$$

$$\mathscr{M}_{\{t\}}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathscr{M}_\nu : (\exists C > 0)(\exists k > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}^d)(\nu(n) \le Ce^{k|n|^{1/t}})\}.$$

Za $\omega \in \mathscr{M}_*(\mathbb{Z}^d)$, definišemo prostore

$$\mathscr{P}l^{q*}_\omega = \{f \in \mathscr{P}'^* : \{f_n\omega(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^q, \text{ gde } f_n = \langle f, e_{-n}\rangle\}$$

na kojima se definišu norme

$$\|f\|_{\mathscr{P}l^{q*}_\omega} = \|\{f_n\omega(n)\}\|_{\ell^q}.$$

Od sada pa nadalje posmatramo samo slučajeve kad $q \ge 1$. Dokaz sledeće tvrdnje je očigledan.

**Propozicija 5.3.1.** *Ako $q_1 \le q_2$ i $\omega_2 \le C\omega_1$, tada $\mathscr{P}l^{q_1*}_{\omega_1} \subseteq \mathscr{P}l^{q_2*}_{\omega_2}$.*

Uzećemo u obzir lokalni prostor $\mathscr{P}l^{q*}_{\omega,loc}$ koji se sastoji od distribucija $f \in \mathscr{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ čije periodične ekstenzije $(\varphi f)_p \in \mathscr{P}l^{q*}_\omega$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{1,x_0})$. Njegova topologija je definisana familijom seminormi

$$\|f\|_{x_0,\varphi} = \|(\varphi f)_p\|_{\mathscr{P}l^{q*}_\omega},$$

gde $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathscr{D}^*(I_{1,x_0})$.

Sledeća propozicija znači da je definicija prostora $\mathscr{P}l^{q*}_{\omega,loc}$ konzistentna.

**Propozicija 5.3.2.** $\mathscr{P}l^{q*}_\omega \subset \mathscr{P}l^{q*}_{\omega,loc}$.

*Dokaz.* Tvrđenje dokazujemo samo u Rumijeovom slučaju.

Neka $f = \sum\limits_n f_n e_n \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_\omega$ i $\varphi = \sum_n \varphi_n e_n \in \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{1,x_0})$. Tada je periodična ekstenzija $(\varphi f)_p = \varphi_p f$. Iz (2.3.1) i nejednakosti Minkovskog imamo

$$\begin{aligned}\|\varphi_p f\|_{\mathscr{P}l^{q\{t\}}_\omega} &\le C\Big(\sum_n \Big(\sum_j \nu(j)\,|\varphi_j|\,\omega(n-j)|f_{n-j}|\Big)^q\Big)^{1/q}\\ &\le C\sum_j \Big(\sum_n \big(\nu(j)\,|\varphi_j|\,\omega(n-j)|f_{n-j}|\big)^q\Big)^{1/q}\end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \nu(j)|\varphi_j| \big( \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \big(\omega(k-j)|f_{k-j}|\big)^q\big)^{1/q}$$
$$\leq C\|\varphi_p\|_{\mathscr{P}l_\nu^{1\{t\}}} \|f\|_{\mathscr{P}l_\omega^{q\{t\}}} < \infty.$$

□

U produžetku, razmatraćemo samo osnovne prostore tipa Rumijea i njihove duale. Odgovarajuće rezultate u prostorima tipa Berlinga su slični i lakši za dokazivanje.

Za fiksni $t > 1$, stavljamo $\omega_k(n) = e^{k|n|^{1/t}}$, $k \in \mathbb{R}$. Radi jednostavnosti, pišemo $\mathscr{P}l_k^{q\{t\}} := \mathscr{P}l_{\omega_k}^{q\{t\}}$ i $\mathscr{P}l_{k,loc}^{q\{t\}} := \mathscr{P}l_{\omega_k,loc}^{q\{t\}}$. Jasno je da

$$\mathscr{P}^{\{t\}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathscr{P}l_k^{q\{t\}} = \bigcap_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{P}l_\omega^{q\{t\}}; \qquad \mathscr{P}'^{\{t\}} = \bigcup_{k\leq 0} \mathscr{P}l_k^{q\{t\}} = \bigcup_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{P}l_\omega^{q\{t\}}.$$

Štaviše,

$$\mathscr{E}^{\{t\}} = \bigcap_{k\geq 0} \mathscr{P}l_{k,loc}^{q\{t\}} = \bigcap_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{P}l_{\omega,loc}^{q\{t\}} \quad \text{i} \quad \mathscr{D}_F'^{\{t\}} = \bigcup_{k\leq 0} \mathscr{P}l_{k,loc}^{q\{t\}} = \bigcup_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{P}l_{\omega,loc}^{q\{t\}},$$

gde $\mathscr{E}^{\{t\}}$ je prostor svih ultradiferencijabilnih funkcija reda $t$ tipa Rumijea i $g \in \mathscr{D}_F'^{\{t\}}$ ako postoji ultradiferencijalni operator $P$ klase $\{t\}$ i za neko $G$, neprekidna na $\mathbb{R}^d$, važi $g = P(D)G$,[39].

## 5.4 Množenje u prostorima periodičnih test funkcija

Uzmimo dve fiksne težinske funkcije $\omega \in \mathscr{M}_\nu$, $\nu \in \mathscr{M}_{\{t\}}(\mathbb{Z}^d)$ (uporedi (2.3.1)).

**Definicija 5.4.1.** *Za* $f_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_{1,n}e_n \in \mathscr{P}l_\omega^{q_1\{t\}}$ *i* $f_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_{2,n}e_n \in \mathscr{P}l_\nu^{q_2\{t\}}$*. definišemo njihov proizvod sa*

$$f_1 f_2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f_n e_n, \text{ gde } f_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} f_{1,n-j}f_{2,j}, \ n \in \mathbb{Z}^d.$$

Ova definicija nam dozvoljava da uvedemo množenje u lokalnim verzijama ovih prostora.

**Teorema 5.4.2.** *Neka* $f_1 \in \mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{\omega,loc}$ *i* $f_2 \in \mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{\nu,loc}$. *Za* $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < \eta < 1$, *pustimo da* $\phi \in \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{1,x_0})$ *bude tako da* $\phi(x) = 1$ *za* $x \in I_{\eta,x_0}$. *Ako* $f_{I_{\eta,x_0}} \in \mathscr{D}'^{\{t\}}(I_{\eta,x_0})$ *je restrikcija proizvoda* $(\phi f_1)_p(\phi f_2)_p$ *nad* $I_{\eta,x_0}$, *tada proizvod* $f := f_1 f_2$, *je dobro definisan.*

*Dokaz.* Različiti izbori množitelja $\phi$ dovode do različite Furijeove koeficijente ali, prema propoziciji 5.3.2, imamo $f_{I_{\eta,x_0}} = f_{I_{\eta',x'_0}}$ nad $I_{\eta,x_0} \cap I_{\eta',x'_0}$. Prema tome $f_{I_{\eta,x_0}} = f \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_{\omega,loc}$ je dobro definisana kao i proizvod $f_1 f_2 := f$. □

**Propozicija 5.4.3.** *Neka* $q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ *su takvi da* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + 1$. *Tada preslikavanja*

$$\mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{\omega} \times \mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{\nu} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_{\omega} \tag{5.4.1}$$

*i*

$$\mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{\omega,loc} \times \mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{\nu,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_{\omega,loc} \tag{5.4.2}$$

*su neprekidna.*

*Dokaz.* Jangova nejednakost (1.1.6) i (2.3.1) povlače

$$\|f_1 f_2\|_{\mathscr{P}l^{q\{t\}}_{\omega}} \leq C \|f_1\|_{\mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{\omega}} \|f_2\|_{\mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{\nu}},$$

tj. neprekidnost preslikavanja (5.4.1). Neprekidnost preslikavanja (5.4.2) sledi direktno iz neprekidnosti preslikavanja (5.4.1). □

Kao posledica, dobija se sledeća:

**Posledica 5.4.4.** *Ako* $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,

$$k_1 + k_2 \geq 0, \qquad k \leq \min\{k_1, k_2\}, \tag{5.4.3}$$

*tada preslikavanja*

$$\mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{k_1} \times \mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{k_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_{k}$$

*i*

$$\mathscr{P}l^{q_1\{t\}}_{k_1,loc} \times \mathscr{P}l^{q_2\{t\}}_{k_2,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{P}l^{q\{t\}}_{k,loc}$$

*su neprekidna.*

*Dokaz.* Nije nikakvo ograničenje ako pretpostavimo da $k_1 \geq 0$ i $k = k_2$. Jasno je da $k_1 \geq |k_2|$ mora da važi kako bi bilo ispunjeno $k_1 + k_2 \geq 0$. Neprekidnost tada sledi iz Propozicije 5.4.3 za $\omega(n) = e^{k_2|n|^{1/t}}$ i $\nu(n) = e^{k_1|n|^{1/t}}$ jer (2.3.1) važi u ovom slučaju. □

## 5.5 Talasni front ultradistribucije

Talasni front ultradistribucije je obopštenje pojma talasnog fronta distribucije. Rezultate koji smo izložili u Delu 2.4 ćemo obopštiti.

U ovom delu ćemo opisati talasni front ultradistribucije $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ preko Furijeovih koeficijenata periodičnog produžetka neke odgovarajuće lokalizacije ultradistribucije $f$ u okolini $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Koristićemo slične ideje kao i kod odgovarajućeg problema za distribucije. Posmatraćemo samo ultradistribucije tipa Rumijea. Kod ultradistribucija tipa Berlinga, rezultati se izvode sa odgovarajućim promenama.

**Definicija 5.5.1.** *Za $t > 1$, $(x_0, \xi_0) \notin WF^{\{t\}}(f)$ ako postoje $\psi \in \mathscr{D}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ sa $\psi \equiv 1$ u okolini $x_0$ i otvoreni konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ koji sadrži $\xi_0$ tako da*

$$(\exists N > 0)(\exists C_N > 0)(\forall \xi \in \Gamma)\ |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_N e^{-N|\xi|^{1/t}}. \tag{5.5.1}$$

**Teorema 5.5.2.** *Neka je $f \in \mathscr{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ i $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(*i*) *Postoje $\phi \in \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon,x_0})$, gde $\varepsilon \in (0,1)$ i $\phi \equiv 1$ u okolini tačke $x_0$ i otvoreni konus $\Gamma$ koji sadrži $\xi_0$ tako da*

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\exists C_N > 0)(\forall n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d) \quad |\widehat{\psi f}(n)| \leq C_N \mathrm{e}^{-N|n|^{1/t}}. \tag{5.5.2}$$

(*ii*) $(x_0, \xi_0) \notin WF^{\{t\}}(f)$.

*Dokaz.* Dokaz je sličan odgovarajućim dokazom kod distribucija koji je izložen u delu 2.4 i [51], ali mi ćemo ga detaljno izložiti radi kompletnosti. Sužavanjem konusne okoline tačke $\xi_0$, možemo izabrati $\psi$ u (5.5.1) sa proizvoljno malim nosačem u okolini tačke $x_0$. Odavde (*ii*) povlači (*i*).

Neka je ispunjen uslov (*i*). Dokazaćemo da postoje konstanta $\varepsilon'$ i otvoreni konus $\Gamma_1 \ni \xi_0$ tako da

$$\begin{gathered}(\forall B \text{ ograničen skup u } \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0}))(\forall N > 0)(\exists C'_N > 0)\\ (\forall n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) \quad \sup_{\varphi \in B} |\widehat{\varphi f}(n)| \leq C'_N \mathrm{e}^{-N|n|^{1/s}}.\end{gathered} \tag{5.5.3}$$

Biramo broj $\varepsilon'$ takav da $\phi \equiv 1$ nad $I_{\varepsilon',x_0}$. Biramo otvoreni konus $\Gamma_1$ tako da $\xi_0 \in \Gamma_1$ i $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$ . Neka $c \in (0,1)$ je konstanta manja od rastojanja između granice $\partial\Gamma$ konusa $\Gamma$ i preseka zatvarača $\overline{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom.

Tada $\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_1)(|\xi - y| \leq c|\xi|)\} \subset \Gamma$. Neka je $B \subset \mathscr{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0})$ ograničeni skup. Iz $\phi\varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in B$ vidimo da su $\widehat{\varphi f}(n)$ Furijeovi koeficijenti periodične ultradistribucije $(\varphi)_p(\phi f)_p$. Znači, za $\varphi \in B$ i $n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi f}(n)| = |\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}(j)\widehat{\phi f}(n-j)| &\leq (\sum_{|j| \leq c|n|} + \sum_{|j| > c|n|})|\widehat{\varphi}(j)\widehat{\phi f}(n-j)| \\ &=: I_1(n) + I_2(n)\end{aligned}$$

Ocenjujemo $I_1(n)$:

$$I_1(n) = \sum_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\varphi}(n-j)||\widehat{\phi f}(j)| \leq C \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)|,$$

gde konstanta $C$ zavisi samo od skupa $B$. Imajući u vidu da od $|n-j| \leq c|n|$ sledi $|j| \geq (1-c)|n|$, dobijamo

$$\begin{aligned}\sup_{\varphi \in B,\, n \in \Gamma_1} \mathrm{e}^{-N|n|^{1/t}} I_1(n) &\leq C \sup_{n \in \Gamma_1} \mathrm{e}^{-N|n|^{1/t}} \sup_{|n-j| \leq c|n|} |\widehat{\phi f}(j)| \\ &\leq C \sup_{j \in \Gamma_{\xi_0}} (1-c)^{-N} \mathrm{e}^{-N|j|^{1/t}} |\widehat{\phi f}(j)| = C(1-c)^{-N} C_N.\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

Sledi ocena izraza $I_2$. Za ovaj cilj koristimo da $|n-j| \leq (1+c^{-1})|j|$ ako $|j| \geq c|n|$. Od teoreme Pejli-Viner–a, postoje $M > 0, D > 0$ tako da

$$|\widehat{\phi f}(n-j)| \leq D\mathrm{e}^{-M|n-j|^{1/t}}, \quad n, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Ograničenost skupa $B \subset \mathscr{D}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, povlači da

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{(M+N)|j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| := K_N < \infty.$$

Štaviše, $\forall \varphi \in B$ važi

$$\begin{aligned}\sup_{n \in \Gamma_1} \mathrm{e}^{-N|n|^{1/t}} I_2(n) &\leq D \sup_{n \in \Gamma_1} \mathrm{e}^{-N|n|^{1/t}} \sum_{|j| \geq c|n|} \mathrm{e}^{M|n-j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| \\ &\leq DC^{-N}(1+c^{-1})^M K_N.\end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Od (5.5.4) i (5.5.5), dobijamo (5.5.3).

Sada sledi dokaz da $(x_0,\xi_0)\notin WF(f)$ od (5.5.3). Neka $\psi\in\mathscr{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0})$ je jednaka 1 u okolini tačke $x_0$. Tada, skup $B=\{\varphi_\tau:=\psi\mathrm{e}_{-\tau}:\ \tau\in[0,1)^d\}$ je ograničeni podskup u $\mathscr{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0})$. Odavde

$$\sup_{\tau\in[0,1)^d}|\widehat{\psi f}(n+\tau)|=\sup_{\tau\in[0,1)^d}|\widehat{\varphi_\tau f}(n)|\leq\frac{C'_N}{\mathrm{e}^{N|n|^{1/t}}},\quad\forall n\in\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d,$$

$$\sup_{\xi\in(\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d)+[0,1)^d}|\mathrm{e}^{N|\xi|^{1/t}}\widehat{\psi f}(\xi)|\leq(1+4d)^{N/2}C'_N. \tag{5.5.6}$$

Neka je $\Gamma_2$ otvoreni konus pravca $\xi_0$ tako da $\overline{\Gamma}_2\subset\Gamma_1\cup\{0\}$ i neka je konstanta $c'$ tako izabrana da $\left\{y\in\mathbb{R}^d:(\exists\xi\in\Gamma_2)(|\xi-y|\leq c'|\xi|)\right\}\subset\Gamma_1$. Tada

$$\Gamma_2\cap\{\xi\in\mathbb{R}^d:\ |\xi|c'\geq 1\}\subset(\Gamma_1\cap\mathbb{Z}^d)+[0,1)^d.$$

Prema tome

$$\sup_{\xi\in\Gamma_2}\mathrm{e}^{N|\xi|^{1/t}}|\widehat{\psi f}(\xi)|\leq\max\{C''_N,(1+4d)^{N/2}C'_N\}=C_N<\infty,$$

gde

$$C''_N=\sup_{\xi\in\Gamma_2,\,|\xi|<1/c'}\mathrm{e}^{N|\xi|^{1/t}}|\widehat{\psi f}(\xi)|.$$

Ovo znači da $(x_0,\xi_0)\notin WF^{\{t\}}(f)$ i teorema je dokazana. □

## 5.6 Soboljevski talasni front ultradistribucije

Slično kao kod distribucija, uvodimo Soboljevski talasni front ultradistribucije Rumijeovog tipa. Kažemo da je $f\in\mathscr{H}^{\{t\}}_{(s)}(\mathbb{R}^d)$ ako $f\in\mathscr{S}'^{*}(\mathbb{R}^d)$ i za svako $N>0$

$$\mathrm{e}^{N|\cdot|^{1/t}}\widehat{f}\in\mathscr{L}^2.$$

Posmatraćemo samo par $(0,\xi_0)$ umesto $(x_0,\xi_0)$ jer se rezultati lako prenose na $(x_0,\xi_0)$.

**Definicija 5.6.1.** *Neka je $f\in\mathscr{D}'^{\{t\}}$ i $\xi_0\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. Kažemo da je $f$ mikrolokalno regularna u smislu Soboljeva u $(0,\xi_0)$, tj. $(0,\xi_0)\notin WF_S^{\{t\}}(f)$, ako postoji otvorena konusna okolina $\Gamma$ tačke $\xi_0$, $\eta\in(0,\frac12)$ i $\psi\in\mathscr{D}'^{\{t\}}((-\eta,\eta)^d)$,* $\operatorname{supp}\psi\subset(-\eta,\eta)^d$, *tako da za svaki $N>0$*

$$\int_\Gamma\left|\widehat{\psi f}(\xi)\right|^2\mathrm{e}^{2N|\xi|^{1/t}}d\xi<\infty. \tag{5.6.1}$$

**Propozicija 5.6.2.** *Neka je $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$. Sledeća dva uslova su ekvivalentna:*

$(A_S^{\{t\}})$ *Postoji otvorena konusna okolina $\Gamma$ tačke $\xi_0$, $\psi \in \mathscr{D}'^{\{t\}}((-\eta,\eta)^d)$ gde $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ je izabrano tako da za $\psi f = \sum_n a_n e_n$ važi*

$$\sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} |a_n|^2 \, \mathrm{e}^{2k|n|^{1/t}} < \infty, \tag{5.6.2}$$

$(B_S^{\{t\}})$ $(0, \xi_0) \notin WF_S^{\{t\}}(f)$

*Dokaz.* Neka je $\Gamma_1$ zatvoreni konus koji je sadržan u $\Gamma \cup \{0\}$ gde $\Gamma$ je otvoreni konus. Tada

$$\sum_{n \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi f}(n)|^2 \mathrm{e}^{2k|n|^{1/t}} \leq \int_\Gamma |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 \mathrm{e}^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi < \infty.$$

Prema tome $(B_S^{\{t\}})$ povlači $(A_S^{\{t\}})$.
Dokažimo i drugu nasoku. Koristimo sledeću lemu:

**Lema 5.6.3.** *Iskaz $(B_S^{\{t\}})$ je ekvivalentan sledećoj tvrdnji:*

$(WF_S^{\{t\}})$ *Postoje otvorena konusna okolina $\Gamma$, $\varepsilon \in (0,1)$ tako da za svakom ograničenom skupu $B \subset \mathscr{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon,\varepsilon)^d)$*

$$\sup_{\varphi \in B} \int_\Gamma \left| \widehat{f\varphi}(\xi) \right|^2 \mathrm{e}^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi < \infty. \tag{5.6.3}$$

*Dokaz.* Neka (5.6.1) važi za $\psi$, tako da $\psi \equiv 1$ nad $(-\eta,\eta)^d$. Uzmimo $\varepsilon < \eta$ i neka je skup $B$ ograničen u $\mathscr{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon,\varepsilon)^d)$. Tada $\varphi f = \varphi\psi f$ i

$$|\widehat{\varphi f}(\xi)| = |\widehat{\varphi\psi f}(\xi)| = |\widehat{\varphi} * \widehat{\psi f}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Biramo otvoreni konus $\Gamma_1$ tako da $\overline{\Gamma_1} \subset \Gamma \cup \{0\}$. U [69] je pokazano da postoji $c \in (0,1)$ za koje $\xi \in \Gamma_1$ i $\eta \notin \Gamma$ povlači $|\xi - \eta| > c \max\{|\xi|, |\eta|\}$. Imamo

$$\left(\int_{\Gamma_1} \left| \widehat{\varphi} * \widehat{\psi f}(\xi) \right|^2 \mathrm{e}^{2k|\xi|^{1/t}} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\eta)| \, \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \left| \widehat{\psi f}(\xi - \eta) \right| \mathrm{e}^{k|\xi-\eta|^{1/t}} d\eta\right)^2 d\xi\right)^{1/2}$$
$$:= c(I_1 + I_2),$$

gde

$$I_1 = (\int_{\Gamma_1} (\int_{\Gamma} |\widehat{\varphi}(\eta)|\, \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \left|\widehat{\psi f}(\xi-\eta)\right| \mathrm{e}^{k|\xi-\eta|^{1/t}} d\eta)^2 d\xi)^{1/2},$$

$$I_2 = (\int_{\Gamma_1} (\int_{\mathbb{R}^d\setminus\Gamma} |\widehat{\varphi}(\eta)|\, \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \left|\widehat{\psi f}(\xi-\eta)\right| \mathrm{e}^{k|\xi-\eta|^{1/t}} d\eta)^2 d\xi)^{1/2}.$$

$\chi_\Gamma$ je karakteristična funkcija okoline $\Gamma$. Tada

$$\left\| |\widehat{\varphi}(\eta)|\, \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} * (\chi_\Gamma |\widehat{\psi f}(\eta)|) \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \left\| \widehat{\varphi}(\eta) \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)} \left\| (\chi_\Gamma |\widehat{\psi f}|)(\eta) \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Iz $\sup\limits_{\varphi\in B} \left\| \widehat{\varphi}(\eta) \mathrm{e}^{k|\eta|^{1/t}} \right\|_{\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^d)} < C_1$ i (5.6.1), dobija se da $I_1 \leq C_0 < \infty$. Ostaje još da se nađe ograničenje integrala $I_2$. Koristimo da $\psi f$ ima kompaktni nosač. Od teoreme Pejli-Vinera, postoje $D > 0$ i $M > 0$,

$$|\widehat{\psi f}(\eta)| \leq D \mathrm{e}^{M|\eta|^{1/t}}, \quad \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $\varphi \in B$, za svako $k > 0$, postoji $C_k > 0$ tako da

$$|\widehat{\varphi}(\xi-\eta)| \leq C_N \mathrm{e}^{(-k-t)|\xi-\eta|^{1/t}}.$$

Od načina na koji smo izabrali $\Gamma_1$, imamo

$$I_2 \leq D(\int_{\Gamma_1} (\int_{\mathbb{R}^d\setminus\Gamma} |\widehat{\varphi}(\xi-\eta)| \mathrm{e}^{(-k-t)|\xi-\eta|^{1/t}} \mathrm{e}^{M|\xi-\eta|^{1/t}} d\eta)^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

Za neku drugu konstantu $D_1 > 0$ i dovljno veliko $N > 0$, dobija se

$$I_2 \leq D_1(\int_{\Gamma_1} (\int_{\mathbb{R}^d\setminus\Gamma} \mathrm{e}^{-k|\xi|^{1/t}} \mathrm{e}^{-k|\eta|^{1/t}} \mathrm{e}^{M|\eta|^{1/t}} d\eta)^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

Prema tome, $I_2 \leq \infty$. Ovim smo dokazali ekvivalenciju $(B_S^{\{t\}})$ i $(WF_S^{\{t\}})$. $\square$

Sada ćemo završiti dokaz Propozicije 5.6.2, tj.da $(A_S^{\{t\}})$ povlači $(B_S^{\{t\}})$. Uzmimo konus $\Gamma_{\xi_0} = \Gamma$ tako da (5.6.2) je ispunjeno za $\psi \in \mathscr{D}'^{\{t\}}((-\varepsilon,\varepsilon)^d)$. Neka je

$$B = \left\{ \varphi = \psi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}, \tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d \right\}.$$

Neka je $\Gamma_0$ otvoreni konus za koji $\overline{\Gamma_0} \subset \Gamma \cup \{0\}$. Iz (5.6.2) dobija se

$$\sup_{\tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d} \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \langle n, \tau \rangle} e^{\mathrm{i} \langle \xi, \tau \rangle} (\psi f)(\tau) d\tau \right|^2 \mathrm{e}^{N|n|^{1/t}}$$

$$\leq \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sup_{\tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d} |\widehat{\psi f}(n+\tau)| \mathrm{e}^{N|n|^{1/t}} \leq \infty.$$

Kako

$$\int_{\Gamma_0} |\widehat{\psi f}(\xi)|^2 \mathrm{e}^{N|\xi|^{1/t}} d\xi \leq \sum_{n \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d} \sup_{\tau \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d} |\widehat{\psi f}(n+\tau)| \mathrm{e}^{N|n|^{1/t}} < \infty,$$

propozicija je dokazana. $\square$

# Dodatak A

# Elementi iz teorije Lokalno-konveksnih prostora

Sa $X, Y$, itd. označavamo vektorske prostore nad $\mathbb{C}$. Vektorski prostor $X$ je *lokalno konveksan topološki vektor prostor* ili kraće *lokalno konveksan prostor*, ako je topološki prostor i postoji familija $\mathfrak{S}$ semi-normi tako da mreža $x_\nu$ u $X$ konvergira ka $z$ ako i samo ako $p(x_\nu - z) \to 0$ za svaku $p \in \mathfrak{S}$. Proizvoljna familija $\mathfrak{S}$ semi-normi na vektorskom prostoru $X$ određuje jedinstvenu topologiju na $X$. Ova topologija se naziva *lokalno konveksna topologija definisana familijom semi-normi* $\mathfrak{S}$.

Lokalno konveksna topologija definisana familijom semi-normi $\mathfrak{S}$ je Hausdorfova ako i samo ako $\mathfrak{S}$ zadovoljava uslov za normu u sledećem smislu:

$$[(\forall p \in \mathfrak{S}) p(x) = 0] \Rightarrow x = 0.$$

Od sada pa nadalje, pretpostavljamo da je svaka lokalno konveksna topologija Hausdorfova sem ako nije drugačije naglašeno.

**Propozicija A.0.1.** *Topologija lokalno konveksnog prostora $X$ je metrizabilna ako i samo ako ona može biti definisana sa najviše prebrojivo mnogo semi-normi.*

Ako je topologija prostora $X$ definisana konačnim brojem semi-normi, tada suma ovih semi-normi je norma, koja i sama definiše topologiju na $X$. To znači da je $X$ normirani prostor.

Kaže se da je lokalno konveksni prostor $X$ *kvazi-kompletan* ako je svaki ograničen zatvoren skup u njemu kompletan. Kompletni lokalno konveksni prostor je kvazi-kompletan, i kvazi-kompletan lokalno konveksan prostor je sekvencijalno kompletan. Ako $X$ je metrizabilan, tada ova tri koncepta se savpadaju, ali u opštem slučaju oni su različiti jedan od drugog. Kompletan metrizabilan lokalno konveksan prostor naziva se Fréšetov prostor, ili $(F)$-prostor.

Opšta osobina uniformnih prostora je da je podskup lokalno konveksnog prostora $X$ kompaktan ako i samo ako on je prekompaktan i kompletan.

Ako je $X$ lokalno konveksan prostor, tada možemo posmatrati, pored originalnu topologiju na $X$, i lokalno konveksnu topologiju definisanu familijom semi-normi $\{|\langle x, x'\rangle| : x' \in X'\}$. Ova topologija se naziva slaba topologija na $X$, i označava se sa $\sigma(X, X')$. Lokalno konveksan prostor $X$ opremljen sa njegovom slabom topologijom označava se sa $X_\sigma$. Mreža $x_\nu \in X$ konvergira ka $x \in X$ u slaboj topologiji ako $\lim_{\nu\to\infty} \langle x_\nu, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$ za svaki $x' \in X'$. Tada kažemo da $x_\nu$ konvergira slabo ka $x$.

**Propozicija A.0.2.** *Jaki dual (DF)-prostora je Frešetov prostor.*

**Teorema A.0.3** (Grotendik[1])**.** *Jaki dual metrizabilnog lokalno konveksnog prostora je (DF)- prostor.*

Dijagram

$$X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z \tag{A.0.1}$$

sastavljen od vektorskih prostora i linearnih preslikavanja među njima kažemo da je *tačan* u $Y$ ako se slika $\operatorname{Im} S$ poklapa sa jezgrom $\ker T$. Ukoliko su $X$, $Y$ i $Z$ lokalno konveksni prostori, a $S$ i $T$ topološki homomorfizmi, tada se kaže da je dijagram topološki tačan. Ako je $X$ zatvoren linearan potprostor lokalno konveksnog prostora $Y$, $Z$ je faktor-prostor $Y/X$, i $\iota$ i $\pi$ su kanonična preslikavanja, tada je niz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0 \tag{A.0.2}$$

topološki tačan, tj. on je topološki tačan svuda. Ovde 0 označava lokalno konveksni prostor koji se sastoji samo od koordinatnog početka. Obrnuto, ako (A.0.2) je topološki tačan niz, tada on je izomorfan sa tačnim nizom povezan sa zatvorenim linearnim potprostorom i faktor-prostorom. Sledeća teorema je direktna posledica definicije i teoreme Hana-Banaha:

[1] Alexander Grothendieck, francuski matematičar, 1928 – 2014.

**Teorema A.0.4.** *Ako* (A.0.2) *je topološki tačan niz, tada dijagram*

$$0 \longleftarrow X' \xleftarrow{\iota'} Y' \xleftarrow{\pi'} Z' \longleftarrow 0 \tag{A.0.3}$$

*sastavljen od dualnih prostora i dualnih preslikavanja je tačan niz.*

Otuda sledi da (A.0.3) gde su $X$, $Y$ i $Z$ opremljeni slabim topologijama je takođe topološki tačan niz. Slično, (A.0.3) je topološki tačan niz sa slabim$^*$ topologijama u $X'$, $Y'$ i $Z'$. Međutim, u odnosu na jake topologije, $\iota'$ i $\pi'$ su neprekidna linearna preslikavanja ali ne nužno homomorfizmi.

## A.1 Projektivne granice lokalno konveksnih prostora

Neka je $\{u_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in A\}$, familija linearnih preslikavanja iz vektorskog prostora $X$ u lokalno konveksnim prostorima $X_\alpha$. Tada postoji najslabija lokalno konveksna topologija na $X$ u odnosu na koju sva $u_\alpha$ su neprekidna. Ova topologija se naziva *(generalizovana) projektivna lokalno konveksna topologija* u odnosu na sistem $(X_\alpha, u_\alpha)$. Ako je $\mathfrak{S}_\alpha$ familija semi-normi koja definiše topologiju na $X_\alpha$, tada

$$\mathfrak{S} = \{p \circ u_\alpha : \alpha \in A, p \in \mathfrak{S}_\alpha\}$$

je familija semi-normi koja definiše projektivnu lokalno konveksnu topologiju na $X$. Ova topologija nije nužno Hausdorfova.

Ako $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je vektorski prostor predstavljen kao direktan proizvod lokalno konveksnih prostora $X_\alpha$ i ako $u_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ su kanonične projekcije, tada projektivnu lokalno konveksnu topologiju nazivamo *direktan proizvod lokalno konveksnih topologija.* Dekartov proizvod $X$ opremljen sa ovom topologijom je *direktan proizvod* lokalno konveksnih prostora $X_\alpha$.

Dalje, ako je $X$ linearan potprostor lokalno konveksnog prostora $Y$, i ako je $u : X \longrightarrow Y$ ulaganje, tada najslabija lokalno konveksna topologija u odnosu na koju je $u$ neprekidno je tačno relativna topologija prostora $X$ kao potprostora od $Y$.

Ako projektivna lokalno konveksna topologija je Hausdorfova, tada ona je kombinacija gornjih dva specijalnih slučajeva u sledećem smislu: Definišemo $u : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ sa $u(x) = (u_\alpha(x))$; tada $u$ je injekcija radi pretpostavke da je $X$ Hausdorfov. Projektivna lokalno konveksna topologija na $X$ se tada savpada sa relativnom topologijom na $X$ posmatran kao linearni potprostor proizvoda $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ u odnosu na $u$. Obratno, ako preslikavanje $u$ defisano gore je injekcija, tada projektivna lokalno konveksna topologija na $X$ je Hausdorfova.

Sa druge strane, obične projektivne granice lokalno konveksnih prostora definišu se na sledeći način. Neka je $A$ nasočeni skup i pretpostavimo da je za svaki $\alpha \in A$ dat lokalno konveksni prostor $X_\alpha$ zajedno sa neprekidnim linearnim preslikavanjima $u_\alpha^\beta : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ definisane za svaki par $(\alpha, \beta)$ sa $\alpha > \beta$ i $u_\gamma^\alpha = u_\gamma^\beta \circ u_\beta^\alpha$ kad god $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in A$ i $\alpha > \beta > \gamma$. Takav sistem $(X_\alpha, u_\beta^\alpha)$ naziva se *projektivni sistem lokalno konveksnih prostora*. Tada, definišemo *projektivnu granicu lokalno konveksnih prostora* $X_\alpha$ da bude projektivna granica

$$\text{proj lim}\, X_\alpha = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha : u_\beta^\alpha(x_\alpha) = x_\beta\} \tag{A.1.1}$$

vektorskih prostora $X_\alpha$ opremljenom sa najslabijom lokalno konveksnom topologijom u odnosu na koju kanonična preslikavanja

$$u_\alpha : \text{proj lim}\, X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$$

koja su definisana sa $(x_\alpha) \longrightarrow x_\alpha$ su neprekidna.

Pretpostavimo da su $(X_\alpha, u_\beta^\alpha)$ i $(Y_\alpha, u_\beta^\alpha)$ projektivni sistemi lokalno konveksnih prostora sa istim nasočenim skupom $A$ kao njihovim indeksnim skupom. Ako je dato neprekidno linearno preslikavanje $T_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$, za svaki $\alpha$, i ako ono zadovoljava

$$u_\beta^\alpha \circ T_\alpha = T_\beta \circ u_\beta^\alpha, \qquad \text{za sve } \alpha > \beta$$

tada neprekidno linearno preslikavanje

$$T : \text{proj lim}\, X_\alpha \longrightarrow \text{proj lim}\, Y_\alpha$$

koje se definiše sa $T(x_\alpha) = (T_\alpha x_\alpha)$, nazivamo *projektivnom granicom preslikavanja $T_\alpha$*.

Neka $(X_\alpha : \alpha \in A)$ je projektivan sistem lokalno konveksnih prostora. Ako $\alpha : \Lambda \longrightarrow A$ je preslikavanje koje zapažava red nasočenog skupa $\Lambda$ sa kofinalnom slikom $\alpha(\Lambda)$ u $A$, tada projektivni sistem $(X_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ definisan sa $Y_\lambda = X_{\alpha(\lambda)}$ naziva se *podsistemom* originalnog projektivnog sistema. U ovom slučaju, lako je dokazati da

$$\text{proj lim}_\lambda\, Y_\lambda = \text{proj lim}_\alpha\, X_\alpha \tag{A.1.2}$$

kao kanonični izomorfizam.

Od neprekidnosti $u^\alpha_\beta$ sledi da proj $\lim_\alpha X_\alpha$ je zatvoreni linearni potprostor od $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Naročito, tačna je sledeća propozicija.

**Propozicija A.1.1.** *Ako $X_\alpha$ su kompletni (respektivno kvazi-kompletni ili sekvencijalno kompletni) prostori, tada projektivna granica* proj $\lim X_\alpha$ *je takođe kompletan (respektivno kvazi-kompletan ili sekvencijalno kompletan) prostor.*

Kada skup $A$ je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, je potrebno samo da odredimo neprekidna linearna preslikavanja $u^{j+1}_j : X_{j+1} \longrightarrow X_j$ za svako $j \in \mathbb{N}$. Ostala preslikavanja se opredeljuju kao proizvodi ovih preslikavanja. U ovom slučaju, često označavamo projektivni sistem pomoću dijagramom:

$$X_1 \xleftarrow{u^2_1} X_2 \xleftarrow{u^3_2} X_3 \xleftarrow{u^4_3} \cdots \xleftarrow{u^j_{j-1}} X_j \xleftarrow{u^{j+1}_j} \cdots \tag{A.1.3}$$

Ako u ovom slučaju svi $X_j$ su Banahovi prostori, tada projektivna granica proj $\lim X_j$ je kompletan i metrizabilan lokalno konveksan prostor čija topologija je definisana prebrojivom familijom semi-normi. Važi i obratno

**Teorema A.1.2.** *Projektivna granica niza Banahovih prostora $X_j$ je Frešetov prostor. Obrnuto, svaki Frešetov prostor može biti izražen kao projektivna granica niza Banahovih prostora.*

Slično se može pokazati da svaki lokalno konveksni prostor $X$ je izomorfan sa gustim linearnim potprostorom projektivne granice proj $\lim X_\alpha$ Banahovih prostora. Ako, štaviše, možemo izabrati projektivni sistem tako da za svaki $\alpha > \beta$, $u^\alpha_\beta : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ nisu samo neprekidna nego i slabo kompaktna, tada se kaže da je $X$ *Kŏmura prostor*. Štaviše, ako možemo napraviti da sva preslikavanja $u^\alpha_\beta$ budu kompaktna, tada se kaže da je $X$ *Švarcov prostor*.

Frešetov prostor koji je takođe i Švarcov prostor (respektivno, Kŏmura prostor) kraće se naziva *(FS)-prostor* (respektivno, *(FK)-prostor*). Lokalno konveksni prostor $X$ je (FS)-prostor (respektivno (FK)-prostor) ako i samo ako njega možemo izraziti kao projektivnu granicu niza Banahovih prostora $X_j$ tako da svako $u^{j+1}_j : X_{j+1} \longrightarrow X_j$ u (A.1.3) je kompaktno (respektivno slabo kompaktno). Zbog sledeće leme $X_j$ mogu biti proizvoljni lokalno konveksni prostori. Naime, (FS)-prostor (respektivno (FK)-prostor) $X$ je lokalno konveksan prostor koji se može izraziti kao projektivna granica proj $\lim X_j$ niza lokalno konveksnih prostora $X_j$ tako da svako preslikavanje $u^{j+1}_j : X_{j+1} \longrightarrow X_j$ je kompaktno (respektivno slabo kompaktno).

**Lema A.1.3.** *Neka su $X$ i $Y$ lokalno konveksni prostori. Linearno preslikavanje $T : X \longrightarrow Y$ je kompaktno (respektivno slabo kompaktno) ako i samo ako postoji Banahov prostor $N$ tako da je $T$ moguće razložiti kao proizvoda dva neprekidna linearna preslikavanja*

$$X \xrightarrow{T_1} N \xrightarrow{T_2} Y,$$

*gde slika $T_2(B)$ jedinične lopte $B$ u $N$ je kompaktan (respektivno slabo kompaktan) skup. Štaviše, ako je $T$ injekcija, tada $T_1$ i $T_2$ mogu da se izaberu da budu injekcije.*

**Teorema A.1.4.** *Neka je $X = \text{proj} \lim X_\alpha$ projektivna granica lokalno konveksnih prostora. Ako za svaki $\alpha$ postoji $\beta > \alpha$ tako da $u_\alpha^\beta : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ preslikava svakog ograničenog skupa u relativno kompaktnom skupu (respektivno relativno slabo kompaktnom skupu), tada je $X$ semi-Montelov prostor (respektivno semi-refleksivan prostor).*

Naročito, projektivne granice semi-Montelovih prostora (respektivno semi-refleksivnih prostora) su semi-Montelovi (respektivno semi-refleksivni).

**Teorema A.1.5.** *Neka je $Y$ proizvoljan zatvoreni linearni potprostor projektivne granice* $\text{proj} \lim X_\alpha$ *lokalno konveksnih prostora. Postavljamo*

$$Y_\alpha = [u_\alpha(Y)]_{X_\alpha}, \tag{A.1.4}$$

*gde su $u_\alpha$ :* $\text{proj} \lim X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ *kanonična preslikavanja i $[\ \ ]_{X_\alpha}$ označava zatvarač u $X_\alpha$. Tada, imamo kanonični izomorfizam*

$$Y = \text{proj} \lim Y_\alpha. \tag{A.1.5}$$

Naročito, neka je $Y = \text{proj} \lim X_\alpha$. Tada dobijamo da svaki lokalno konveksan prostor kojeg je moguće izraziti kao projektivnu granicu uvek se može predstaviti kao granica projektivnog sistema $X_\alpha$ lokalno konveksnih prostora u koju slika $u_\alpha : \text{proj} \lim X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ je gusti skup za sve $\alpha$. Ovakav projektivan sistem se kaže da je *reduciran*.

Za razliku od slučaja zatvorenih linearnih potprostora, faktor-prostor projektivne granice, u opštem slučaju, nije projektivna granica faktor-prostora. Sledeća teorema daje gotovo jedini poznati dovoljan uslov. Nazvaćemo je lemom *Mitag-Lefler–a* jer argumenti koji se koriste su isti kao i u dokazu ove poznate teoreme.

**Teorema A.1.6.** *Neka je*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{I_1} & Y_1 & \xrightarrow{P_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_1^2 & & \uparrow v_1^2 & & \uparrow w_1^2 & & \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{I_2} & Y_2 & \xrightarrow{P_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_2^3 & & \uparrow v_2^3 & & \uparrow w_2^3 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & X_j & \xrightarrow{I_j} & Y_j & \xrightarrow{P_j} & Z_j & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow u_j^{j+1} & & \uparrow v_j^{j+1} & & \uparrow w_j^{j+1} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
\tag{A.1.6}
$$

*projektivan niz od kratkih tačnih nizova abelovih grupa, t.j. komutativan dijagram abelovih grupa i linearnih preslikavanja sa tačnim redicama. Tada je tačno sledeće:*

*(i) Niz projektivnih granica*

$$0 \longrightarrow \text{proj lim}\, X_j \xrightarrow{I} \text{proj lim}\, Y_j \xrightarrow{P} \text{proj lim}\, Z_j \tag{A.1.7}$$

*je tačan.*

*(ii) Ako su $X_j$ kompletne metrizabilne abelove grupe, $u_j^{j+1}$ su neprekidna, i za svaki $j$ slika $u_j^{j+2}(X_{j+2})$ je gusti skup u skupu $u_j^{j+1}(X_{j+1})$ u odnosu na topologiju metrike $X_j$, tada niz*

$$0 \longrightarrow \text{proj lim}\, X_j \xrightarrow{I} \text{proj lim}\, Y_j \xrightarrow{P} \text{proj lim}\, Z_j \longrightarrow 0 \tag{A.1.8}$$

*je tačan.*

*(iii) Ako, pored pretpostavke u (ii), svaka redica u* (A.1.6) *je topološki tačan niz lokalno konveksnih prostora, u opštem slučaju, u odnosu na različite topologije od metričkih topologija u (ii), sva preslikavanja su neprekidna pod tim lokalno konveksnim topologijama, i metričke topologije u (ii) su jače nego lokalno konveksne topologije, tada* (A.1.8) *je topološki tačan niz lokalno konveksnih prostora.*

**Teorema A.1.7.** *Zatvoreni linearni potprostori i faktor-prostori nekog (FS)-prostora (respektivno (FK)-prostora) su (FS)-prostori (respektivno (FK)-prostori).*

Za prebrojiv broj projektivnih granica $X_j = \text{proj lim}_k X_{j,k}$ nizova Banahovih prostora (ili lokalno konveksnih prostora), njihov direktan proizvod $\prod X_j$ je izomorfan projektivnoj granici niza

$$X_{1,1} \longleftarrow X_{1,2} \times X_{2,1} \longleftarrow X_{1,3} \times X_{2,2} \times X_{3,1} \longleftarrow \cdots$$

Prema tome dobijamo:

**Teorema A.1.8.** *Direktni proizvodi* $\prod X_j$ *i projektivne granice* proj lim $X_j$ *prebrojivo mnogo (FS)-prostora (respektivno (FK)-prostora) su takokođe (FS)-prostori (respektivno (FK)-prostori).*

## A.2 Induktive granice lokalno konveksnih prostora

Promenom smera preslikavanja u prethodnom odeljku, dobijamo induktivne granice lokalno konveksnih prostora.

Neka je $X$ vektorski prostor, i $u^\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$, $\alpha \in A$, je familija linearnih preslikavanja definisanim na lokalno konveksnim prostorima $X_\alpha$. Tada najjača lokalno konveksna topologija na $X$ u odnosu na koju svako $u^\alpha$ je neprekidno naziva se *(generalizovana) induktivna lokalno konveksna topologija* sistema $(X_\alpha, u^\alpha)$. Semi-norma $p$ na $X$ je neprekidna u odnosu na ovu lokalno konveksnu topologiju ako i samo ako $p \circ u^\alpha$ je neprekidna semi-norma na $X_\alpha$ za svaki $\alpha$. Međutim, ova lokalno konveksna topologija nije nužno Hausdorfova čak i ako $\{u^\alpha(X_\alpha)\}$ generiše $X$. Naglašavamo da je ova topologija, u opštem slučaju, različita od induktivne topologije kao kod topološkog prostora, t.j. najjače topologije u odnosu na koju svako $u^\alpha, \alpha \in A$, je neprekidno.

Neka je $X = \oplus X_\alpha$ vektorski prostor koji se izražava kao direktna suma lokalno konveksnih prostora $X_\alpha$ i neka su $u_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ kanonične injekcije. Tada induktivna lokalno konveksna topologija na $X$ naziva se *lokalno konveksna direktna suma topologija* i direktna suma $X$ opremljena sa ovom topologijom naziva se *direktna suma lokalno konveksnih prostora* $X_\alpha$. Ako je $\mathfrak{S}_\alpha$ familija svih neprekidnih semi-normi na $X_\alpha$, tada lokalno konveksna direktna suma topologija je lokalno konveksna topologija definisana sa svim semi-normama oblika

$$p(\oplus x_\alpha) = \sum_\alpha p_\alpha(x_\alpha), p_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha. \tag{A.2.1}$$

Naročito, lokalno konveksna direktna suma topologija je Hausdorfova.

Topologija faktor-prostora na faktor-prostoru $X/Y$ lokalno konveksnog prostora $X$ je takođe induktivna lokalno konveksna topologija relativna kanoničnoj projekciji $X \to X/Y$.

Opšta induktivna lokalno konveksna topologija u odnosu na sistem $(x_\alpha, u^\alpha)$ je kombinacija gornjih dva slučajeva ako $\{u^\alpha(X_\alpha)\}$ generiše $X$. Naime, u ovom slučaju, preslikavanje $u : \oplus X_\alpha \to X$ definisano sa $u(\oplus x_\alpha) = \sum_\alpha u^\alpha(x_\alpha)$ je surjektivno, i možemo posmatrati $X$ kao faktor-prostor direktne sume $\oplus X_\alpha$. Tada se induktivna lokalno konveksna topologija na $X$ identifikuje sa topologijom faktor-prostora lokalno konveksne direktne sume topologija.

Slično, možemo definisati obične induktivne granice lokalno konveksnih prostora. Neka je $X_\alpha$ , $\alpha \in A$, familija lokalno konveksnih prostora sa nasočenim skupom $A$ kao njen skup indeksa, i $u^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$, $\alpha < \beta$, je familija neprekidnih linearnih preslikavanja koja zadovoljavaju $u^\alpha_\gamma = u^\beta_\gamma \circ u^\alpha_\beta$ svaki put kada $\alpha < \beta < \gamma$. Tada induktivna granica vektorskih prostora $X_\alpha$ je faktor-prostor

$$\operatorname{ind} \lim X_\alpha = \oplus X_\alpha/\sim \tag{A.2.2}$$

gde $\oplus X_\alpha/\sim$ je linearni potprostor generisan svim elementima čija vrednost u indeksu $\alpha$ je $x_\alpha \in X_\alpha$ i čija vrednost u indeksu $\beta$ je $u^\alpha_\beta(x_\alpha)$ za par $\alpha < \beta$, a ostale vrednosti su jenaki 0. Definišemo kanonično preslikavanje $u^\alpha : X_\alpha \longrightarrow \operatorname{ind} \lim X_\alpha$ da bude preslikavanje koje preslikava $x_\alpha \in X_\alpha$ u klasu ekvivalencije koja sadrži element čija vrednost u indeksu $\alpha$ je $x_\alpha$, i 0 u drugom slučaju. Induktivna granica $\operatorname{ind} \lim X_\alpha$ opremljena najjačom lokalno konveksnom topologijom u odnosu na koju sva kanonična preslikavanja su neprekidna naziva se *induktivna granica lokalno konveksnih prostora* $X_\alpha$. Kako se može videti iz (A.2.2), ovo je isto što i faktor-prostor direktne sume lokalno konveksnih prostora. Međutim, u ovom slučaju neprekidnost $u^\alpha_\beta$ ne povlači, u opštem slučaju, da linearni potprostor   je zatvoren, i prema tome induktivna lokalno konveksna topologija nije nužno Hausdorfova. Navešćemo dovoljan uslov da ona postane Hausdorfova.

**Propozicija A.2.1.** *Ako svi lokalno konveksni prostori $X_\alpha$ su bačvasti (respektivno, kvazi-bačvasti ili bornološki), tada induktivna granica* $\operatorname{ind} \lim X_\alpha$ *takođe je bačvast (respektivno, kvazi-bačvast ili bornološki) prostor.*

Induktivni sistem niza lokalno konveksnih prostora moguće je izraziti pomoću sledećeg dijagrama

$$X_1 \xrightarrow{u^1_2} X_2 \xrightarrow{u^2_3} X_3 \xrightarrow{u^3_4} \cdots \xrightarrow{u^{j-1}_j} X_j \xrightarrow{u^j_{j+1}} \cdots \tag{A.2.3}$$

Ako je $u^j_{j+1} : X_j \longrightarrow X_{j+1}$ izomorfizam nad svojom slikom za svako $j$, tada se niz naziva striktno induktivnim nizom. U ovom slučaju, svako $X_j$ može se posmatrati kao linearnim potprostorom od $X_{j+1}$ u odnosu na izomorfizam $u^j_{j+1}$, i induktivna granica $X$ može se posmatrati kao unija: $X = \cup X_j$. Sledeća teorema dokazuje da ova identifikacija zapazuje topologiju.

**Teorema A.2.2.** *Ako* (A.2.3) *je striktan induktivan niz lokalno konveksnih prostora, tada kanonično preslikavanje* $u^j : X_j \longrightarrow \operatorname{ind}\lim X_j$ *je izomorfizam svoje slike za svako* $j$. *Naročito, induktivna granica* $\operatorname{ind}\lim X_j$ *je Hausdorfova.*

*Ako, pored toga, slika* $u^j_{j+1}(X_j)$ *je zatvoreni linearni potprostor od* $X_{j+1}$ *za svaki* $j$, *tada kanonična slika* $u^j(X_j)$ *u* $\operatorname{ind}\lim X_j$ *je zatvoreni linearni potprostor za svaki* $j$. *Štaviše, svaki ograničeni skup* $B$ *u* $\operatorname{ind}\lim X_j$, *je slika* $u^j(B_j)$ *ograničenog skupa* $B_j$ *u* $X_j$ *za neko* $j$.

Lokalno konveksni prostor $X$ se kaže da je (LF)-prostor ako on može biti izražen kao striktna induktivna granica niza Frešetovih prostora $X_j$. Naročito, ako svi $X_j$ su (FS)-prostori (respektivno, (FK)-prostori), tada se kaže da je $X$ (LFS)-prostor (respektivno, an (LFK)-prostor). Od propozicije A.2.1 i teoreme A.2.2, striktna induktivna granica kompletnih Montelovih prostora je Montelov prostor. Otuda, (LFS)-prostori su Montelovi prostori.

Sada razmatramo slučaj gde su preslikavanja $u^j_{j+1}$ u induktivnom nizu (A.2.3) kompaktne (respektivno, slabo kompaktne) linearne injekcije. Tada, prema lemi A.1.3, moguće je naći Banahove prostore $Y_j$ između $X_j$ i $X_{j+1}$ i injekcije $v^j_{j+1} : Y_j \longrightarrow Y_{j+1}$ tako da dijagram

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & & \xrightarrow{u_2^1} & & X_2 & & \xrightarrow{u_3^2} & & X_3 & & \longrightarrow \cdots \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & Y_1 & & \xrightarrow{v_2^1} & & Y_2 & & \xrightarrow{v_3^2} & & Y_3 \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{A.2.4}$$

je komutativan i slika $v^j_{j+1}(B_j)$ jedinične topke $B_j$ u $Y_j$ je kompaktan (respektivno, slabo kompaktan) skup u $Y_{j+1}$ za svaki $j$. Jasno je da je

$$\operatorname{ind}\lim X_j = \operatorname{ind}\lim Y_j$$

kanonični izomorfizam uključujući i topologije.

**Teorema A.2.3.** *Neka je* (A.2.3) *induktivan niz lokalno konveksnih prostora* $X_j$ *i slabo kompaktnih linearnih injekcija* $u^j_{j+1}$. *Tada induktivna granica*

*$X = \text{ind}\lim X_j$ je Hausdorfov bornološki refleksivan (DF)-prostor. Svaki ograničen skup $B$ u $X$ je slika u odnosu kanoničnog preslikavanja $u^j : X_j \longrightarrow X$ relativno slabo kompaktnog skupa $B_j$ u neko $X_j$. Ako, štaviše, sva preslikavanja $u^j_{j+1}$ su kompaktna, tada možemo izabrati, kao gore $B_j$, metrizabilanog relativno kompaktanog skupa, tako da $u^j : B_j \longrightarrow B$ postaje homeomorfizam. Posebno, $X$ je Montelov prostor i niz $(x_j)$ konvergira u $X$ ako i samo ako $x_j = u^j(y_j)$ za neki $j$ i $(y_j)$ konvergira u $X_j$. Štaviše, topološki prostor* $\text{ind}\lim X_j$ *u ovom slučaju savpada se sa induktivnom granicom topoloških prostora $X_j$. Drugim rečima, skup $S$ u $X$ je zatvoren (respektivno, otvoren) ako i samo ako $(u^j)^{-1}(S)$ je zatvoren (respektivno, otvoren) u $X_j$ za svaki $j$. Naročito, skup $S$ u $X$ je zatvoren ako i samo ako on je sekvencijalno zatvoren. Za proizvoljnog topološkog prostora $Y$, preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako ono je sekvencijalno neprekidno.*

Ako lokalno konveksni prostor $X$ je predstavljen kako je prikazano gore, kao induktivna granica niza lokalno konveksnih prostora sa kompaktnim (respektivno, slabo kompaktnim) linearnim injekcijama, kažemo da je $X$ *(DFS)-prostor* (respektivno, *(DFK)-prostor*). Prema teoremi, ovi su prostori refleksivni (DF)-prostori.

**Teorema A.2.4.** *Ako je $(X_\alpha, u^\alpha_\beta)$ reduciran projektivan sistem lokalno konveksnih prostora, tada je dual njegovom projektivnom granicom, kao vektorski prostor, kanonično izomorfan induktivnoj granici duala $X'_\alpha$ prostora $X_\alpha$:*

$$(\text{proj}\ \lim X_\alpha)' = \text{ind}\ \lim(X'_\alpha) \tag{A.2.5}$$

*Štaviše, slaba topologija na* $\text{proj}\ \lim X_\alpha$ *poklapa se sa topologijom projektivne granice slabih topologija na $X_\alpha$:*

$$(\text{proj}\ \lim X_\alpha)_\sigma = \text{proj}\ \lim(X_\alpha)_\sigma. \tag{A.2.6}$$

Što se tiče jake topologije na $X'$, duali ${u_\alpha}' : {X_\alpha}' \to X'$ kanoničnih preslikavanja $u_\alpha : X \to X_\alpha$ definišu kao njihovu induktivnu granicu neprekidnu bijekciju

$$(\text{ind}\ \lim X_\alpha)'_\beta \longrightarrow \text{proj}\ \lim(X_\alpha)'_\beta. \tag{A.2.7}$$

Međutim ovo nije otvoreno preslikavanje u opštem slučaju. Sledeća teorema daje opšti dovoljni uslov da (A.2.7) bude izomorfizam.

**Teorema A.2.5.** *Neka je $(X_\alpha, u^\beta_\alpha)$ reduciran projektivan sistem lokalno konveksnih prostora. Ako za svaki $\alpha$ postoji $\beta \geq \alpha$ tako da $u^\beta_\alpha$ preslikava svakog* *ograničenog skupa u relativno slabo kompaktnom skupu, tada* proj $\lim X_\alpha$ *je semi-refleksivan, i postoji prirodni izomorfizam*

$$(\text{proj }\lim X_\alpha)'_\beta = \text{ind }\lim (X_\alpha)'_\beta \tag{A.2.8}$$

**Teorema A.2.6.** *Za duala induktivne granice lokalno konveksnih prostora postoji kanonični izomorfizam između vektorskih prostora:*

$$(\text{ind }\lim X_\alpha)' = \text{proj }\lim X'_\alpha. \tag{A.2.9}$$

*Ako svaki ograničeni skup u* proj $\lim X_\alpha$ *je slika ograničenog skupa u neki* $X_\alpha$*, tada postoji prirodni izomorfizam lokalno konveksnih prostora*

$$(\text{ind }\lim X_\alpha)'_\beta = \text{proj }\lim {(X_\alpha)'}_\beta. \tag{A.2.10}$$

Kada (FS)-prostor (respektivno, (FK)-prostor) $X$ je izražen kao projektivna granica reduciranog kompaktnog (respektivno, slabo kompaktnog) niza Banahovih prostora $(X_j)_j$, $X = \text{proj }\lim X_j$, onda jaki dual $X'$ prostora $X$ je, prema teoremi A.2.5, izomorfan induktivnoj granici ind $\lim X'_j$. Niz Banahovih prostora $X'_j$ zadovoljava uslove teoreme A.2.3.

**Teorema A.2.7.** *Jaki dual (FS)-prostora (respektivno, (FK)-prostora) je (DFS)-prostor (respektivno, (DFK)-prostor). Jaki dual (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) je (FS)-prostor (respektivno, (FK)-prostor).*

Takođe naglašavamo da ako niz neprekidnih linearnih funkcionala $x'_k$ na (FS)-prostoru konvergira jako, tada on konvergira ravnomerno na nekoj okolini koordinatnog početka prostora $X$.

Primenjujući teoremu A.2.6 na nekom (LFS)-prostoru (respektivno, (LFK)-prostoru) $X = \text{ind }\lim X_j$ vidimo da jaki dual $X'$ poklapa se sa projektivnom granicom proj $\lim {X_j}'$, gde $(u_j^{j+1})' : {X_{j+1}}' \longrightarrow {X_j}'$ je neprekidna otvorena surjekcija između (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) kao dual ulaganja $u_{j+1}^j : X_j \longrightarrow X_{j+1}$ zatvorenog linearnog potprostora u refleksivni.

**Teorema A.2.8.** *Jaki dual (LFS)–prostora (respektivno, (LFK)–prostora) je (DLFS)–prostor (respektivno, (DLFK)–prostor), jaki dual (DLFS)–prostora (respektivno, (DLFK)–prostora) je (LFS)–prostor (respektivno, (LFK)–prostor). Ovi prostori su kompletni, bornološki i refleksivni. Štaviše, (LFS)–prostori i (DLFS)–prostori su Montelovi prostori.*

Sledeća teorema se naziva *dualna Mitag-Leflerova lema.*

**Teorema A.2.9.** *Neka je*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{I_1} & Y_1 & \xrightarrow{P_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_2^1 & & \downarrow v_2^1 & & \downarrow w_2^1 & & \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{I_2} & Y_2 & \xrightarrow{P_2} & Z_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_3^2 & & \downarrow v_3^2 & & \downarrow w_3^2 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow u_j^{j-1} & & \downarrow v_j^{j-1} & & \downarrow w_j^{j-1} & & \\
0 & \longrightarrow & X_j & \xrightarrow{I_j} & Y_j & \xrightarrow{P_j} & Z_j & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow u_{j+1}^j & & \downarrow v_{j+1}^j & & \downarrow w_{j+1}^j & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{A.2.11}$$

*induktivan niz kratkih tačnih nizova Abelovih groupa. Tada su tačni sledeći iskazi:*

*(i)* *Niz induktivnih granica*

$$0 \longrightarrow \text{proj } \lim X_j \xrightarrow{I} \text{proj } \lim Y_j \xrightarrow{P} \text{proj } \lim Z_j \longrightarrow 0 \tag{A.2.12}$$

*je tačan.*

*(ii)* *Ako svaki red u* (A.2.11) *je topološki tačan niz Banahovih prostora, i svako od preslikavanja* $u_{j+1}^j$, $v_{j+1}^j$ *i* $w_{j+1}^j$ *je slabo kompaktna injekcija, tada jaki dual od* (A.2.12)*:*

$$0 \longleftarrow (\text{ind } \lim X_j)'_\beta \xleftarrow{I'} (\text{ind } \lim Y_j)'_\beta \xleftarrow{P'} (\text{ind } \lim Z_j)'_\beta \longleftarrow 0 \tag{A.2.13}$$

*je topološki tačan.*

*(iii)* *Ako, pored datih uslova u (ii), induktivna granica* ind $\lim X_j$ *je Montelov prostor, tada je* (A.2.12) *topološki tačan.*

**Teorema A.2.10.** *Zatvoreni linearni potprostori i faktor-prostori (DFS)-prostora su takođe (DFS)-prostori. Faktor prostori (DFK)-prostora su (DFK)-prostori. Prebrojive direktne sume* $\oplus X_j$ *i induktivne granice* ind $\lim X_j$ *nizova (DFS)-prostora (respektivno, (DFK)-prostora) su (DFS)-prostori (respektivno, (DFK)-prostori).*

Zatvoreni linearni potprostor (DFK)-prostora ne mora da bude (DFK)-prostor.

# Bibliografija


[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, xviii+268 pp., 1975.

[2] P. Antosik, J. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam; PWN—Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1973.

[3] R. Beals, *Advanced mathematical analysis. Periodic functions and distributions, complex analysis, Laplace transform and applications.* Graduate Texts in Mathematics, No. 12, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[4] A. Beurling, *Quasi-analyticity and general distributions*, Lectures 4 and 5, Amer. Math. Soc. Summer Inst., Stanford, 1961.

[5] N. N. Bogoljubow, D.W. Schirkow *Probleme der Quantenfeldtheorie: II. Beseitigung der Divergenzen aus der Streumatrix* Fortschr. Phys. 4 (1956) 438–517

[6] N. N. Bogoljubow, D.W. Schirkow *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, New York: Interscience, 1959.

[7] J. Bonet and P. Domański, *Köthe coechelon spaces as locally convex algebras*, Studia Math. 199 (2010), 241–265.

[8] R. W. Braun, R. Meise and B. A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math. 17 (1990), 206–237.

[9] Christian Brouder, Nguyen Viet Dang and Frédéric Hélein, *A smooth introduction to the wavefront set*, J. Phys. A: Math. Theory 47 (2014).

[10] J.M. Bony, G. Grubb, L. Hörmander, H. Komatsu, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis and Applications: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held at Montecatini Terme, Italy, July 3-11, 1989*, Springer Berlin Heidelberg, 1991.

[11] R. Carmichael, A. Kamiński and S. Pilipović, *Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces*, Series on Analysis, Applications and Computation - Vol. 1, World Scientific, Singapore, 2007.

[12] S. Coriasco, K. Johanson, J. Toft, *Local wave-front sets of Banach and Fréchet types, and pseudo-differential operators*, Monatsh. Math. 169 (2013), 285–316.

[13] S. Coriasco, K. Johanson, J. Toft, *Global wave-front sets of Banach, Fréchet and modulation space types, and pseudo-differential operators*, J. Differential Equations 254 (2013), 3228–3258.

[14] D. Doličanin - Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, preprint.

[15] H.Epstein, V. Glaser, *The role of locality in perturbation theory*, Ann. Inst. Henri Poincaré 19 (1973), 211–95.

[16] G.B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications - 2nd ed.*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[17] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Firmin Didot, Paris, 1822; Jacques Gabay, Sceaux, 1988.

[18] F.G.Friedlander, M.Joshi, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1999.

[19] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Properties and Operations, Vol.1*, Academic Press, New York, 1964.

[20] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Spaces of Fundamental and Generalized Functions, Vol.2*, Academic Press, New York, 1968.

[21] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Theory of Differential Equations, Vol.3*, Academic Press, New York, 1967.

[22] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Applications of Harmonic Analysis, Vol.4*, Academic Press, New York, 1964.

[23] V. I. Gorbačuk, M. L. Gorbačuk, *Trigonometric series and generalized functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (4) 257 (1981), 799-804, (Ruski).

[24] V. I. Gorbačuk, *On Fourier series of periodic ultradistributions*, Ukranian Math. J. (2) 34 (1982), 144-150. (Russian).

[25] T. Gramchev, S. Pilipović and L. Rodino, *Classes of degenerate elliptic operators in Gelfand-Shilov spaces*, New developments in pseudodifferential operators, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, 189 (2009), 15–31.

[26] T. Gramchev, S. Pilipović and L. Rodino, *Global regularity and stability in S-spaces for classes of degenerate Shubin operators*, Pseudodifferential operators: complex analysis and partial differential equations, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 205 (2010), 81–90.

[27] T. Gramchev, A. Lecke, S. Pilipović and L. Rodino, *Gelfand-Shilov type space through Hermite expansions*, Pseudo-Differential Operators and Generalized Functions, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 245 (2015), 95-105.

[28] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, 2001. ISBN 0817640223.

[29] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer-Verlag, 1997.

[30] L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127, (1971), 79–183.

[31] L. Hörmander, *Linear differential operators*, Actes Congr. Int. Math. Nice, 1 (1970), 121–133.

[32] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I: Distribution theory and Fourier analysis*, Springer-Verlag, 1983.

[33] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Gabor pairs, and a discrete approach to wave-front sets*, Monatsh. Math. 166 (2012), 181–199.

[34] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in some spaces of ultradistributions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 92(106) (2012), 124.

[35] A. Kamiński, D. Perišić and S. Pilipović, *On various integral transformations of tempered ultradistributions*, Demonstratio Math. 33 (2000), 641-655.

[36] R. P. Kanwal, *Generalized funktions. Theory and applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[37] G. Köthe, *Topological vector spaces II*, Vol. II, Springer-verlag, New York Inc., 1979.

[38] H. Komatsu, *Ultradistributions, I: Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20 (1973), 25–105.

[39] H. Komatsu, *Ultradistributions 1, Structural theorems for a characterization*, Jour. Fac. Sci, University of Tokyo. Section 1A, Mathematics 20(1973), 25–105.

[40] H. Komatsu, *Ultradistributions, II: The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 24 (1977), 607–628.

[41] H. Komatsu, *Ultradistributions III: Vector valued distributions and the theory of kernels*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Mat. 29 (1982), 653–718.

[42] H. Komatsu, *Microlocal Analysis in Gevrey Classes and in Complex Domains*, Lecture Notes in Math. 1726, Springer, Berlin (1989), 426–493.

[43] H. Komatsu, *An introduction to the theory of generalized functions*, Lecture Notes, Tokyo, 1999.

[44] H. Komatsu, *Generalized Functions and Operational Calculus Discussed by Fourier and Heaviside*, http://www.math.technion.ac.il/ mcwikel/j2/komatsu.ps Function spaces, interpolation theory, and related topics : Proceedings of the international conference in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday : Lund, Sweden, August 17-22, 2000

[45] D. Kovačević and S. Pilipović, *Structural properties of the space of tempered ultradistributions*, Proc. Conf. on Complex Analysis and Generalized Functions, Varna 1991, P ubl. House of the Bulgar. Acad. Sci., Sofia (1993), 206–237.

[46] S. S. Kutateladze, *Sergei Sobolev and Laurent Schwartz*, Herald of the Russian Academy of Sciences, 74:2, (2005), 183-188.

[47] S. S. Kutateladze, *Sobolev and Schwartz: Two fates and two fames*, J. Appl. Indust. Math., 2008, V. 2, No. 3, 301310.

[48] M. Langenbruch, *Hermite functions and weighted spaces of generalized functions*, Manuscripta Math. 119 (2006), 269-285.

[49] M. J. Lighthill, *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*, Cambridge University Press, (1978).

[50] S. Maksimović, Svetlana Mincheva-Kaminska, S. Pilipović, P. Sokoloski, *Sequential approach to the spaces of ultradistributions*, to appear.

[51] S. Maksimovic, S. Pilipovic, P.Sokoloski, J. Vindas *Wave fronts of distributions via Fourier coefficients*. Publ.Inst.Math. Nouvelle série (Beograd), tome 97(111) (2015), 1–10.

[52] S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear.

[53] V. G. Mazya, *Sobolev spaces. (Translated from Russian)* Zbl 0692.46023, Berlin etc.: Springer-Verlag. xix, 486 p. (1985).

[54] J. Mikusinski, *Sur la method de généralization de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible*, Fund. Math. 35 (1948), 235-239.

[55] J. Mikusiński, *Une définition de distribution*, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III 4 (1955), 589–591.

[56] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions, I*, Dissertationes Math. 12 (1957).

[57] J. Mikusiński and R. Sikorski, *The elementary theory of distributions, II*, Dissertationes Math. 25 (1961).

[58] S. Mincheva-Kamińska, *A sequential approach to the convolution of Roumieu ultradistributions*, submitted.

[59] M. Oberguggenberger, *Products of distributions*, J. Math. 365 (1986) 1–11.

[60] M. Oberguggenberger, *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations, Pitman Research Notes in Mathematics*, Longman Scientific & Technical (1992).

[61] R. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, AMS Coll. Publ. XIX, NY, 1934.

[62] H. J. Petzsche and D. Vogt, *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions*, Math. Ann. 267 (1984), 17–35.

[63] S. Pilipović, *Tempered ultradistributions*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 2-B (1988), 235–251.

[64] S. Pilipovic, *Structural theorems for periodic ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 261–266.

[65] S. Pilipović, *Characterization of bounded sets in spaces of ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 1191–1206.

[66] S. Pilipović, B. Prangoski and J. Vindas, *On Quasianalytic Classes of Gelfand-Shilov Type. Parametrix and Convolution*, preprint (http://arxiv.org/pdf/1507.08331.pdf).

[67] S. Pilipović, B.Stanković, *Teorija distribucija*, Math. Soc. 98 (1986).

[68] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in Fourier Lebesgue and modulation spaces. Part I*, J. Fourier Anal. Appl. 17 (2011), 374–407.

[69] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in Fourier Lebesgue and modulation spaces. Part II*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 1 (3) (2010), 341 – 376.

[70] S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Singular support and $FL_q$ continuity of pseudo-differential operators, in Approximation and Computation, a volume dedicated to 60th anniversary of G.V. Milovanovic (edited by W. Gautschi, G. Mastroianni, and Th.M. Rassias)*, Springer, (2010) 357 - 376.

[71] Rivier D. *Une méthode délimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron*, Helv. Phys. Acta 22(1949), 265–318.

[72] A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53, Cambridge University Press, 1964.

[73] L. Rodino, *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*, World Scientific, 1993.

[74] *Sur quelques extensions de la notion de distributions*, Sci. École Norm. Sup. Paris, 3 sér., 77 (1960), 41–121.

[75] C. Roumieu, *Ultra-distributions définis sur $\mathbb{R}^n$ et sur cértaines classes de variétés différentiables*, J. Analyse Math., 10 (1962-63), 153–192.

[76] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Quantization of pseudo-differential operators on the torus*, J. Fourier Anal. Appl. 16 (2010), 943–982.

[77] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-differential operators and symmetries. Background analysis and advanced Topics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[78] M. Sato, *Hyperfunctions and partial differential equations*, Proc. Int. Conf. on Funct. Anal, and Rel. Topics, Tokyo University Press, Tokyo (1969), 91–94.

[79] M. Sato, *Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations*, Actes Congr. Int. Math. Nice 1970, 2, 785–794.

[80] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudodifferential equations*, Springer Lecture Notes in Math. 287,(1973), 265–529.

[81] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques,* Annales Univ. Grenoble, 21 (1945), pp. 57–74.

[82] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome I. Hermann, Paris, 1950.

[83] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Tome II. Hermann, Paris, 1951.

[84] L. Schwartz, *Transformation de Laplace des distributions*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund (1952), 196–206.

[85] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[86] L. Schwartz, *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954), 847–848.

[87] J.S. Silva, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, Rev. Faculdade Ciencias, Lisboa, 2° sirie A 4, (1954-56) 79-186.

[88] K. Skórnik, *Hereditarily periodic distributions*, Studia Math. 43 (1972), 245–272.

[89] S. L. Soboleff, *Le probléme de Cauchy dans l'éspace des fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. URSS, 3:7, (1935), 291–294.

[90] S. L. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le probléme de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sbornik, 1, (43), (1936), 39–72.

[91] S. L. Sobolev, *Introduction to the Theory of Cubature Formulas*, Moscow: Nauka, 1974.

[92] S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics. Translated from the third Russian edition by Harold H. McFaden. With comments by V. P. Palamodov*, Translations of Mathematical Monographs, 90. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. viii+286 pp. ISBN: 0-8218-4549-7

[93] R. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, (Studies in Advanced Mathematics) CRC Press, 1994.

[94] E.C.G. Stueckelberg, D.Rivier, *Causalité et structure de la matrice S*, Helv. Phys. Acta 23(1950), 215–22.

[95] E.C.G. Stueckelberg, T.A. Green, *Elimination des constantes arbitraires dans la théorie des quanta*, Helv. Phys. Acta 24 (1951) 153–174

[96] J. Synowiec *Distributions: The evolution of a mathematical theory*, Historia Math. Vol. 10, Issue 2, May (1983), 149–183.

[97] A. Száz, *Periodic generalized functions*, Publ. Math. (Debrecen) 25 (1978), 227–235.

[98] L. Tartar, *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces (Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana)*, Springer (2007).

[99] G. Temple, *Theories and applications of generalised functions*, J. London Math. Soc. 28, (1953), 134–148.

[100] G. Walter, *Pointwise convergence of distribution expansions*, Studia Math. 26 (1966), 143–154.

[101] J. Vindas, R. Estrada, *Distributional point values and convergence of Fourier series and integrals*, J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), 551–576.

[102] D. Vogt, *Sequence space representations of spaces of test functions and distributions. Functional analysis, holomorphy, and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1979), pp. 405-443, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 83, Dekker, New York, 1983.

[103] A. H. Zemanian, *Geneneralized integral transforms*, Interscience, New York, 1968.

# Kratka Biografija

## Petar Jordan Sokoloski


| | |
|---|---|
| **Adresa:** | ul.„Todor Proeski” br.37, Kruševo, Republika Makedonija |
| **Broj telefona:** | +389 (0)78 441654 |
| **e-mail:** | petar@pmf.ukim.mk, petar.sokoloski@gmail.com |
| **Datum i mesto rođenja:** | 19.06.1979, Bitola, Republika Makedonija |
| **Državljanstvo:** | Republika Makedonija |

**Obrazovanje:** 2010.

**Magistar matematičkih nauka,**
sa prosekom 10.00,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju,
Magistarski rad:
*„Skupovi tačaka radijalne neprekidnosti holomorfnih funkcija na jediničnom disku”*

2003.

**Diplomirani matematičar,**
sa prosekom 9.55,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju,

**Radno iskustvo:** 2010-danas

**asistent**,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju

2010-2014.

**mlađi asistent**,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet Sveti Kiril i Metodij u Skoplju

**Bibliografija-radovi:**

A. Blazevski, P. Sokoloski, *Conceptual introduction to unique-valued sequences*, Poceedings of III Congress of mathematicians of Macedonia, Struga

2005.

D. Dolićanin-Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Wave Fronts of Ultradistributions Via Fourier Series Coefficients*, Bull. math. de la Soc. des math. de la Rép. de Macédoine, Vol. 39 (LXV) No. 2 (2015), 53-59.

B. Ilievski, S. Brsakoska, P. Sokoloski, *Two substitutions in one special nonhomogenious Vecua equation*, Bull. math. de la Soc. des math. de la Rép. de Macédoine, Tome LVII, Skopje 2007.

S. Mincheva-Kamińska, S. Maksimović, S. Pilipović and P. Sokoloski, *Sequental approach to ultradistribution spaces*, to appear.

S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear in Proceedings of the 5-th Mathematical Conference of the Republic of Srpska.

S. Maksimović, S. Pilipović, P. Sokoloski and J. Vindas, *Wave Fronts Via Fourier Series Coefficients*, Publ. Inst. Math. Beograd, 97 (111)(2015), 1-10.

Lj. Nastovski, P. Sokoloski, Nacevska B. *Example of a holomorphic function on a unit disc without radial limits*, Proceedings of the V Congress of mathematicians of Macedonia, Vol. 2 (2015), 41-43.

Novi Pazar, 2016 Petar Sokoloski

# Identifikaciona strana doktorske disertacije

## I. Autor

**Ime i prezime:** Petar Sokoloski

**Datum i mesto rođenja:** 19.06.1979. Bitola, Republika Makedonija.

**Sadašnje zaposlenje:** asistent na Prirodno-matematičkom fakultetu pri Univerzitetu „Sv. Kiril i Metodij" u Skoplju.

## II. Doktorska disertacija

**Naslov:** Prostori periodičnih distribucija, ultradistribucija i talasni front.

**Broj stranica:** xv+140.

**Broj slika:** 0.

**Broj bibliografskih podataka:** 103.

**Ustanova i mesto gde je rad izrađen:** Državni Univerzitet u Novom Pazaru, Departman za matematičke nauke, „Vuka Karađića " bb, Novi Pazar.

**Naučna oblast:** Matematika (Funkcionalna analiza).

# III. Ocena i odbrana

**Datum prijave teme:**

**Broj odluke i datum prihvatanja doktorske disertacije:**

**Komisija za ocenu podobnosti teme i kandidata:**

Predsednik:

Član:

Član:

**Komisija za ocenu doktorske disertacije:**

Predsednik:

Član:

Član:

**Datum odbrane doktorske disertacije:**