Državni univerzitet u Novom Pazaru
Departman za prirodno-matematičke nauke

Ersin Gilić

Nepokretna tačka u b-metričkim i M-konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom

Doktorska disertacija

Novi Pazar, 2023.

	Državni univerzitet u Novom Pazaru **Departman za prirodno-matematičke nauke** 36000 Novi Pazar, Vuka Karadžića 9	Datum i broj
	KLJUČNA DOKUMENTACIJA	

Redni broj, RBR:	
Identifikacioni broj, IBR:	201001/2018
Tip dokumentacije, TD:	Monografska dokumentacija
Tip zapisa, TZ:	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada, VR:	Doktorska disertacija
Autor, AU:	Ersin Gilić
Mentor, MN:	Prof. dr Diana Dolićanin Đekić
Naslov rada, NR:	Nepokretna tačka u b-metričkim i M-konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom
Jezik publikacije, JP:	Srpski jezik
Jezik izvoda, JI:	Srpski jezik
Zemlja publikovanja, ZP:	Srbija
Uže geografsko područje, UGP:	Novi Pazar
Godina, GO:	2023. godina
Izdavač, IZ:	Državni univerzitet u Novom Pazaru
Mesto i adresa, MA:	Novi Pazar, Vuka Karadžića 9
Fizički opis rada, FO: (poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga)	Poglavlja 5/ strana 119/ citata 99/ tabela 0/ slika 1
Naučna oblast, NO:	Matematika
Predmetna odrednica/ključne reči, PO:	Nepokretna tačka, b-metrika F1-kontrakcija, F-Suzuki kontrakcija, M-konusna metrika nad Banahovom algebrom, Lipšicova preslikavanja
UDK:	51
Čuva se, ČU:	Biblioteka Državnog univerziteta u Novom Pazaru, Vuka Karadžića 9
Važna napomena, VN:	
Izvod, IZ:	U ovoj disertaciji razmatra se postojanje i jedinstvenost nepokretne tačke nekih preslikavanja, kao što su F1-kontrakcija, F-Suzuki kontrakcija u okviru b-metričkih prostora i generalizovana Lipšicova preslikavanja u M-konusnim metričkim prostora nad Banahovom algebrom.
Datum prihvatanja teme, DP:	
Datum odbrane, DO:	

Članovi komisije, KO:	Predsednik:	Prof. dr Teodor Atanacković	
	Član:	Prof. dr Ljubiša Kočinac	
	Član:	Prof. dr Miroslava Petrović Torgašev	
	Član:	Prof. dr Dragan Đorđević	
	Mentor:	Prof. dr Diana Dolićanin Đekić	

Sadržaj

Predgovor

Problem nepokretne tačke datira od 1922. godine kada je Banah[1] uveo pojam kontrakcije na metričkim prostorima. Značajna proučavanja počinju sedamdesetih godina prošlog veka. Važne rezultate u ovoj oblasti dali su S. Banah, Lj. B. Ćirić[2], V. Rakočević[3], O. Hadžić,[4] S. Radenović[5], kao i mnogi drugi, koje ćemo spomenuti u nastavku.

Teorija nepokretne tačke je jedna od glavnih grana nelinearne analize. Kao što sam naziv kaže, ova grana matematike se bavi problemima egzistencije, određivanja i konstrukcije nepokretne tačke preslikavanja. Radi se o opširnoj oblasti, koja se i danas uveliko proučava. Predstavlja jednu od najznačajnijih oblasti moderne matematike, kao spoj analize, topologije i geometrije. Snažan razvoj ove teorije, kako u metričkim, tako i u prostorima koji predstavljaju uopštenja metričkih prostora, vezuje se za početak XX veka. Interdisciplinarnog je karaktera, a njen uticaj se proširuje na razne oblasti matematike, uključujući matematičku analizu, numeričku analizu, funkcionalnu analizu, topologiju, ekonomsku matematiku. Osim toga, ne treba zanemariti njen zna-

[1]Stefan Banach (1892–1945)
[2]Ljubomir B. Ćirić (1935–2016)
[3]Vladimir Rakočević (1953)
[4]Olga Hadžić (1946–2019)
[5]Stojan Radenović (1948)

čaj u tehničkim disciplinama teoriji igara, fizici, posebno u domenu kvantne fizike čestica. U današnjem vremenu, istraživanja u ovoj oblasti zadržavaju svoju izuzetnu važnost i dinamičnost, neprestano privlačeći pažnju stručnjaka širom sveta, što dodatno potvrđuje dubinu njenog doprinosa matematici i naučnom okruženju.

Cilj ove disertacije jeste da pokažemo postojanje i jedinstvenost nepokretne tačke nekih preslikavanja, kao što su $F1$-kontrakcija, F-Suzuki kontrakcija u okviru b-metričkih prostora i generalizovana Lipšicova[6] preslikavanja u M-konusnim metričkim prostora nad Banahovom algebrom.

Disertacija se sastoji iz pet poglavlja, od kojih svako poglavlje sadrži određen broj potpoglavlja.

U prvom poglavlju, pored istorijskog osvrta na nepokretnu tačku, ukratko predstavljamo topološke prostore, zatim metričke prostore kao specijalnu klasu topoloških prostora, gde zbog izuzetne važnosti definišemo Košijev niz i kompletan metrički prostor. Takođe, navodimo i definiciju normiranog i Banahovog prostora.

U drugom poglavlju ove doktorske disertacije predstavljamo neka uopštenja metričkih prostora, kao što su: b-metrički prostori, skoro b-metrički prostori, konusni, M-konusni metrički prostori kao generalizaciju M-metričkog prostora i konusnog metričkog prostora nad Banahovom algebrom i super metričke prostore i navodimo neka bitna svojstva koja za njih važe.

Čuvena Banahova teorema o nepokretnoj (fiksnoj) tački koja se često i naziva *Banahov princip kontrakcije*, kao i osnovne oznake, pojmove i rezultate koje ćemo koristiti date su u trećem poglalvju. Za ovaj princip iz 1992.

[6]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903)

godine vezuje se početak izučavanja teorije nepokretne tačke u metričkim prostorima. Pored klasičnog Banahovog dokaza iz rada [19], izložen je i dokaz iz rada [74]. Takođe su date primene pomenute teoreme kod izučavanja egzistencije rešenja jednačina. Razmatraju se obične jednačine, sistem od n linearnih algebarskih jednačina, diferencijalne jednačine i integralne jednačine.

Mnogi autori su definisali preslikavanja kontraktivnog tipa na kompletnom metričkom prostoru X, koja predstavljaju uopštenja dobro poznate Banahove kontrakcije. U mnogim slučajevima takva preslikavanja imaju jedinstvenu nepokretnu tačku, a ona se može dobiti koristeći Pikarovu[7] iteraciju, počevši od neke početne tačke $x_0 \in X$.

Takođe, predstavljamo F-kontrakcije, njene generalizje u metričkim i b-metričkim prostorima, kao i pojam generalizovanog Lipšicovog preslikavanja u okviru M-konusnih metričkih prostora nad Banahovom algebrom

U četvrtom poglavlju predstavljen je prvi originalni rezultat [38] u kojm je dat mnogo jednostavniji i kraći dokaz poznatog značajnog rezultata, [78], koji se odnosi na generalizovanu F-Suzuki kontrakciju u b-kompletnim b-metričkim prostorima. Koristeći naš novi pristup pri dokazivanju da je Pikarov niz b-Košijev, naši rezultati generalizuju, poboljšavaju i dopunjuju nekoliko poznatih rezultata u postojećoj literaturi. Štaviše, predstavljeni su neki novi kontraktivni uslovi da bi se ilustrovala primena dobijenog teorijskog rezultata.

Drugi originalan rezultat [33] koji je predstavljen u petom poglavlju odnosi se na istraživanje postojanja nepokretne tačke za generalizovana Lipši-

[7]Charles Émile Picard (1856–1941)

cova preslikavanja u M-konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom. Kao primenu, ispitujemo postojanje i jedinstvenost rešenja za Fredholmovu[8] integralnu jednačinu.

⋆ ⋆ ⋆

Zahvaljujem svojoj mentorki prof. dr Diani Dolićanin Đekić na ogromnoj pomoći i velikodušnim savetima tokom mog studiranja, a naročito tokom rada na ovoj doktorskoj disertaciji. Pored mnogobrojnih njenih obaveza, ipak bi stalno nalazila vreme za mene i pomagala mi, upućujući me na odgovarajuću literaturu, a često i poklanjajući mi knjige za čitanje i učenje, na čemu sam joj od sveg srca zahvalan. Imati takvu mentorku je veliko zadovoljstvo i čast. Takođe, zahvaljujem i komisiji, čiji su članovi prof. dr Teodor Atanacković; prof. dr Ljubiša Kočinac; prof. dr Miroslava Petrović Torgašev; prof. dr Dragan Đorđević. Svojim sugestijama dali su doprinos konačnoj formi ove doktorske disertacije. Posebno zahvaljujem uvaženom prof. emeritusu Ćemalu Dolićaninu, koji nažalost više nije sa nama, za organizaciju, nesebičnu pomoć i pokazano strpljenje. Naravno, zahvaljujem svojoj porodici i iskrenim prijateljima na podršci, strpljenju i razumevanju u toku svih ovih godina.

Novi Pazar, 2023. Ersin Gilić

[8] Erik Ivar Fredholm (1866—1927)

Glava 1

Uvod

U ovom poglavlju daćemo istorijski ostvrt na razvoj nepokretne tačke, kao i osnovne pojmove o metričkim prostorima koji predstavljaju specijalnu klasu topoloških prostora.

1.1 Istorijski osvrt na napokretnu tačku

Teorija nepokretne tačke je počela da se razvija nakon ubrzanog progresa klasične analize. Za fundamentalne teoreme ove teorije smatraju se Brauerova[9] i Banahova teorema. Proučavanje nepokretne tačke je započelo 1912. godine kada je čuveni holandski matematičar Brauer dokazao da, ako je $f : B \to B$ neprekidna funkcija, a B je otvorena lopta u $\mathbb{R}^n$, onda f ima nepokretnu tačku. Ova teorema garantuje egzistenciju, ali ne i jedinstvenost nepokretne tačke, niti daje njenu konstrukciju. Postoji nekoliko dokaza ove

[9]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

teoreme. Klasični dokaz su dali Birkof[10] i Kellog[11] 1922.godine, a dokaz sličan ovome su dali i Dunford[12] i Švarc[13] 1958.godine. Brauerova teorema ima mnogo primena u analizi, diferencijalnim jednačinama i uopšte u teoremama o egzistenciji za razne tipove jednačina. Imala je veliki značaj u razvoju nekoliko grana matematike, naročito algebarske topologije. Brauerova teorema ne važi u beskonačno dimenzionim prostorima. Prvu teoremu o nepokretnoj tački u beskonačno dimenzionom Banahovom prostoru dokazao je Šauder[14] 1930. godine. Šauderova teorema tvrdi da, ako je B kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora X i $f : B \to B$ je neprekidna funkcija, onda f ima nepokretnu tačku. Šauderova teorema ima primenu u teoriji aproksimacija, teoriji igara i drugim naučnim disciplinama, kao što su inženjerstvo, ekonomija i teorija optimizacije. Uslov kompaktnosti nad skupom B je veoma jak i u većini problema u analizi uslov kompaktnosti nije zadovoljen. Šauder je dokazao teoremu u kojoj je taj uslov oslabljen i ona glasi:

Ako je B zatvoren, ograničen i konveksan podskup Banahovog prostora X i ako je $f : B \to B$ neprekidno preslikavanje, onda f ima nepokretnu tačku.

Tihonov[15] je 1935. godine uopštio prethodnu teoremu na lokalno konveksan vektorsko-topološki prostor. Metod sukcesivnih aproksimacija koji je uveo Liuvil[16] 1837. godine, a zatim razvio Pikar 1890. godine, kulminirao je 1922. godine kada je poljski matematičar Stefan Banah dokazao teoremu da kontraktivno preslikavanje u kompletnom metričkom prostoru ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Njegova teorema se smatra jednim od fundamentalnih

[10] George David Birkhoff(1884–1944)
[11] Oliver Dimon Kelog (1878–1932)
[12] Nelson James Dunford (1906–1986)
[13] Jacob Theodore "Jack" Schwartz (1930–2009)
[14] Juliusz Paweł Schauder (1899–1943)
[15] Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906–1993)
[16] Joseph Liouville (1809–1882)

principa funkcionalne analize. Banahov princip kontrakcije daje egzistenciju, jedinstvenost i niz sukcesivnih aproksimacija koji vodi ka rešenju problema, što je omogućilo raznovrsne primene, naročito u numeričkoj matematici i diferencijalnim jednačinama. Poznata su mnoga uopštenja Banahove teoreme.

Od famozne 1922. godine brojni matematičari su se zainteresovali za Banahovu teoremu generalizujući je u nekoliko pravaca. Neki od njih su "izobličili" aksiome metričkog prostora, dok su drugi "izobličili" uslov kontrakcije. Pomenute generalizacije date su u radovima [7]–[92].

Poznato je da je Banahov princip kontrakcije jedan od najvažnih i najatraktivnijih rezultata u nelinearnoj analizi i u matematičkoj analizi uopšte. Osim toga, celokupno proučavanje ovog koncepta igra ključnu ulogu u različitim disciplinama, uključujući geometriju, diferencijalne jednačine, informatiku, fiziku, ekonomiju, inženjerstvo i mnoge druge oblasti. Nakon što se obezbedi postojanje rešenja, primenjene su numeričke metode za pronalaženje aproksimativnog rešenja. Nepokretna tačka funkcije u velikoj meri zavisi od razmatranih prostora koji su definisani pomoću intuitivnih aksioma. Neke specijalne vrste generalizovanih metričkih prostora su parcijalni metrički prostori, b-metrički prostori, parcijalni b-metrički prostori, prošireni b-metrički prostori, G-metrički prostori, G_b-metrički prostori, S-metrički prostori, S_b-metrički prostori, konusni metrički prostori, konusni b-metrički prostori, fazi metrički prostori, fazi b-metrički prostori, metrički prostori verovatnoća i tako dalje. Više detalja o tipovima generalizovanih metričkih prostora biće dato u narednom potpoglavlju i u radovima [3]- [23]. Treba istaći da različiti metrički prostori daju različite tipove rezultata nepokretne tačke, koje su date kroz različite teoreme u literaturi.

Mnogi autori generalizuju Banahov princip kontrakcije u nekoliko pravaca (videti [23], [57], [3], [10]), kao i u pravcu konusnih metričkih prostora nad Banahovim prostorom [8].

Jedna od centralnih oblasti proučavanja u nelinearnoj analizi je teorija nepokretne tačke. Razlog za to je činjenica da u mnogim problemima iz svakodnevnog života nepokretna tačka predstavlja osnovni matematički alat za obezbeđivanje postojanja i jedinstvenosti rešenja problema. Kao posledica upravo navedene činjenice teorija nepokretne tačke se javlja kao suštinska oblast proučavanja u primenjenoj i čistoj matematici.

Nepokretna tačka predstavlja osnovni pojam teorije nepokretne tačke. Problem nepokretne tačke može se formulisati na sledeći način:

Neka je dat skup X i neka su A_1 i A_2 neprazni skupovi u X, tako da je i njihov presek takođe neprazan skup. Tačka $x \in A_1$ preslikavanja $f : A_1 \to A_2$ za koju je $f(x) = x$ naziva se *nepokretna ili fiksna tačka.* Skup svih nepokretnih tačaka preslikavanja f označava se sa $Fixf$, $Fix(f)$, $F(f)$ ili F_f.

Teorija nepokretne tačke se može podeliti na tri oblasti:

1. Topološka teorija nepokretne tačke,
2. Metrička teorija nepokretne tačke i
3. Diskretna (skupovno teorijska) teorija nepokretne tačke.

Navedene tri oblasti određene su sledećim fundamentalnim teoremama: Brauerova, Banahova i Teorema Tarskog[17] respektivno, koje ćemo u nastavku formulisati.

[17]Alfred Tarski (1901–1983)

Teorema 1.1. (Brauer) Neka je $K[0,1] \subset \mathbb{R}^n$ zatvorena jedinična kugla. Svako neprekidno preslikavanje $f : K[0,1] \to K[0,1]$ ima fiksnu tačku.

Teorema 1.2. (Banah [19]) (Banahov princip kontrakcije) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ kontrakcija. Tada preslikavanje f ima samo jednu nepokretnu tačku.

Teorema 1.3. (Tarski 1955) Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža (parcijalno uređen skup čiji svaki podskup ima supremum i infimum). Pretpostavimo da je funkcija $f : L \to L$ strogo rastuća, tj. za svako $x, y \in L$ sledi da je $f(x) \leq f(y)$. Tada je skup svih nepokretnih tačaka funkcije f kompletna mreža u odnosu na $\leq$.

Oblast istraživanja ove doktorske disertacije biće generalizacija Banahove teoreme o nepokretnoj tački koju ćemo dokazati u trećem poglalvju. Banahov princip kontrakcije se može naći u mnogim knjigama i monografijama, pa čak i u osnovnom udžbeniku matematičke analize, topologije, i funkcionalne analize. Ovaj princip je verovatno najčešće citiran u svim poznatim teoremama o nepokretnoj tački. Uprkos svojoj jednostavnosti, pokazalo se da je veoma moćan i koristan alat u matematici.

Banahova teorema o nepokretnoj tački (takođe poznata kao *teorema o kontrakcionom preslikavanju* ili *princip kontrakcionog preslikavanja*) predstavlja važan alat u teoriji metričkih prostora. Ona garantuje postojanje i jedinstvenost nepokretne tačke određenog preslikavanja iz nekog metričkog prostora u samog sebe, i daje konstruktivni metod za pronalaženje te nepokretne tačke. Taj metod se naziva *Pikarov iterativni metod* (ili *metod sukcesivnih aproksimacija*), a sastoji se u tome da se polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in X$ (nulte aproksimacije) formira niz $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, koji konvergira ka nepokretnoj tački x.

Imajući u vidu da je naš rad usmeren na metričku teoriju nepokretne tačke, u nastavku ćemo ukratko izložiti osnovne pojmove u vezi sa metričkim prostorima.

1.2 Metrički prostori

Na samom početku, definisaćemo topološke prostore, otvoren i zatvoren skup kao, i okolinu proizvoljne tačke i navešćemo neke važne teoreme.

Definicija 1.1. Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{T}$ neka familija podskupova skupa X sa sledećim osobinama:

(T_1) $X \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(T_2) Ako je za sve $i \in I$ (I proizvoljan skup) $A_i \in \mathcal{T}$ tada je

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T};$$

(T_3) Ako su $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{T}$ (n je proizvoljan prirodan broj) tada je

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}.$$

Tada je uređeni par $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor*, a elementi familije $\mathcal{T}$ su *otvoreni skupovi*. Za familiju $\mathcal{T}$ kažemo da je *topologija* na prostoru X.

Definicija 1.2. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Skup $U \subset X$ je *okolina* tačke $x \in X$ ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{T}$ tako da je $x \in O \subset U$.

Teorema 1.4. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Skup $O \subset X$ je otvoren ako i samo ako je O okolina svake svoje tačke.

Definicija 1.3. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Ako je $Z \subset X$ komplement otvorenog skupa $O \subset X$, kažemo da je skup Z *zatvoren*.

Dakle, skup Z je zatvoren ako i samo ako je skup CZ otvoren, gde je CZ oznaka za komplement skupa Z.

Definicija 1.4. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Tada se za tačku $x \in X$ kaže da je:

(a) *tačka zatvaranja (adherentna tačka)* skupa A ako za svaku okolinu $U \ni x$ važi da je $U \cap A \neq \emptyset$. Skup svih tačaka zatvaranja skupa A nazivamo *zatvaranje (adherencija)* skupa A i označavamo sa $\overline{A}$ ili $Cl(A)$.

(b) *tačka nagomilavanja* skupa A ako za svaku okolinu $U \ni x$ važi da je $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A zovemo *izvodni skup* i označavamo sa A'.

(c) *unutrašnja tačka* skupa A ako postoji okolina $U \ni x$ tako da važi $x \in U \subseteq A$. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zovemo *unutrašnjost (interior)* skupa A i označavamo sa $\mathrm{int}A$

(d) *granična (rubna) tačka* skupa A ako za svaku okolini $U \ni x$ važi da je $U \cap A \neq \emptyset$ i $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Skup svih graničnih tačaka skupa A zovemo *granica (rub)* skupa A i označavamo sa ∂A.

Primetimo da iz (a) i (d) sledi

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}.$$

Teorema 1.5. (Teorema o zatvaranju) Za proizvoljan podskup A topološkog prostora važi:

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X : A \subseteq F,\ F \text{ je zatvoren}\} = \bigcap_{A \subseteq F,\ F \text{ zat}} F\ .$$

Za podskup A topološkog prostora X važi:

(a) $\overline{A}$ je zatvoren skup.

(b) $\overline{A}$ je najmanji (u smislu inkluzije) zatvoren skup koji sadrži A, tj. za svaki zatvoren skup $F \supseteq A$ važi $\overline{A} \subseteq F$.

(c) A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.

(d) Uvek važi da je $A \subseteq \overline{A}$.

Teorema 1.6. (Teorema o unutrašnjosti) Za podskup A topološkog prostora važi:

$$\mathrm{int} A = \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq A,\ U \text{ je otvoren}\} = \bigcup_{U \subseteq A,\ U \text{ otv}} U\ .$$

Za proizvoljne podskupove A i B topološkog prostora X važi:

(a) $\mathrm{int} A$ je otvoren skup.

(b) Uvek važi da je $\mathrm{int} A \subseteq A$.

(c) $\mathrm{int} A$ je najveći (u smislu inkluzije) otvoren podskup skupa A tj. za svaki otvoreni skup $U \subseteq A$, važi $U \subseteq \mathrm{int} A$.

(d) A je otvoren ako i samo ako je $A = \mathrm{int} A$.

(e) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$.

(f) Iz $A \subseteq B$ sledi $\mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$ (monotonost).

Definicija 1.5. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Kažemo da je familija $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$ ako važi sledeći uslov:

$$(\forall O \in \mathcal{T})(\exists \{B_i : i \in I\} \subset \mathcal{B})(O = \bigcup_{i \in I} B_i)$$

Dakle, ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$, svaki otvoren skup $O \in \mathcal{T}$ je unija nekih elemenata B_i, $(i \in I)$, familije $\mathcal{B}$.

Lako je pokazati da je $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako za svako $x \in X$ i svaku okolinu V tačke x postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subset V$.

Važnu klasu topoloških prostora čine metrički prostori, čija najvažnija svojstva navodimo u nastavku.

Definicija 1.6. Neka je X neprazan skup. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ naziva se *metrika (rastojanje)* na skupu X ako zadovoljava sledeće uslove:

(i) $d(x, y) \geq 0, \ \ x, y \in X$,

(ii) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$ (simetrija),

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$ (nejednakost trougla).

Metrički prostor je par (X, d), gde se d naziva metrikom na skupu X.

Primer 1.1. $(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički prostor, gde za $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, rastojanje $d_p(x, y)$, $p > 1$, definišemo na sledeći način:

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Primer 1.2. Neka je $C_{[a,b]}$ skup neprekidnih realnih funkcija definisanih nad intervalom $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Tada je $(C_{[a,b]}, d)$ metrički prostor, gde $f, g \in C_{[a,b]}$, rastojanje $d(f, g)$ definišemo na sledeći način

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Definicija 1.7. Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r > 0$. Skupovi:

$$K(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\},$$

$$K[a,r] = \{x \in X : d(x,a) \leq r\},$$

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\},$$

nazivaju se, respektivno *otvorena kugla (lopta)*, *zatvorena kugla (lopta)* i *sfera* u X sa centrom u a i poluprečnikom r.

Familija $\mathcal{T}_d$ podskupova O skupa X sa osobinom da za svako $x \in O$ postoji pozitivan broj $r(x)$ tako da je

$$K(x, r(x)) \subset O$$

naziva se topologija na X (topologija definisana metrikom d).

Definicija 1.8. U metričkom prostoru (X, d) kažemo da niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (koristićemo i oznake (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) u X *konvergira* ka $x \in X$, što označavamo sa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$, odnosno

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Umesto oznake $\lim\limits_{n+\to\infty} x_n = x$ upotrebljava se i oznaka $x_n \to x$, $n \to +\infty$. Iz prethodno navedene relacije sledi da niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $x \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tako da je

$$x_n \in K(x, \varepsilon), \quad \text{za sve} \quad n > n_0(\varepsilon),$$

gde je $K(x, \varepsilon)$ orvorena kugla sa centrom u tački x poluprečnika ε. Ako je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan topološki prostor, kažemo da niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X konvergira ka $x \in X$ ako za svaku okolinu U tačke x postoji $n_U \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n > n_U$ važi $x_n \in U$.

Definicija 1.9. Funkcija $f : X \to Y$, gde su X i Y metrički prostori je *neprekidna* u tački $a \in X$ ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Funkcija f je neprekidna na celom prostoru X ako je neprekidna u svakoj njegovoj tački.

Definicija 1.10. Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ metričkog prostora (X, d) je Košijev ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da iz $m, n \geq n_0$ sledi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Simbolički, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Kao što je poznato svaki konvergentan niz je Košijev, a svaki Košijev niz je ograničen. Takođe, ako Košijev niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz, tada je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz.

Definicija 1.11. Ako u metričkom prostoru (X,d) za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u X postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, kažemo da je (X,d) *kompletan metrički prostor.*

Primer 1.3. $(\mathbb{R}^n,d)$ je kompletan metrički prostor, gde za elemente $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|.$$

Primer 1.4. Prostor ℓ^∞ ograničenih realnih ili kompleksnih nizova sa metrikom

$$d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i-y_i|,\quad x=(x_n)\in l^\infty,\ y=(y_n)\in l^\infty,$$

je kompletan.

Primer 1.5. Važan prostor kompletnog metričkog prostora je $C_b(X)$, gde je $C_b(X)$ skup svih ograničenih i neprekidnih funkcija $f:X\to\mathbb{R}$. Metrika d u $C_b(X)$ je definisana na sledeći način:

$$d(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|,\ f,g\in C_b(X).$$

Teorema 1.7. Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i $A\subset X$ zatvoren skup. Tada je (A,d_A) kompletan, gde je d_A indukovana metrika definisana sa

$$d_A(x,y)=d(x,y),\ x,y\in A.$$

U teoriji realnih funkcija jedne realne promenljive dokazan je sledeći rezultat, poznat kao Hajne[18]-Borelova[19] teorema, tj.

Teorema 1.8. Ako je A zatvoren i ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ i $\{G_i\}_{i\in I}$ otvoren pokrivač skupa A tada postoji konačan skup $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset I$ takav da je $\{G_{i_s}\}_{s=1}^{k}$ pokrivač od A.

Spomenimo ovde da je pojam kompaktnog skupa motivisan upravo navedenom teoremom.

Definicija 1.12. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je *kompaktan* ako iz svake familije otvorenih skupova $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, za koju važi $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, može da se izdvoji konačna familija skupova $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \ldots, O_{\alpha_s}$ tako da je$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} O_{\alpha_i}$. Ako je $A = X$, kažemo da je (X, d) *kompaktan metrički prostor*.

Dalje ćemo definisati normirani i Banahov prostor.

Definicija 1.13. Neka je $\mathbb{K}$ polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, a X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Funkcija $x \to ||x||$ koja preslikava vektorski prostor X u $\mathbb{R}$ naziva se *norma* na X ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $||x|| \geq 0$ za svako $x \in X$,
2. $||x|| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
3. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$, za svako $\lambda \in \mathbb{K}$ i svako $x \in X$,
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ za svako $x, y \in X$ (aksioma trougla).

[18]Hajnrih Eduard Hajne (1821–1881)
[19]Feliks Eduar Žisten Emil Borel (1871–1956)

Definicija 1.14. Neka je X normiran prostor i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definisana na sledeći način

$$d(x, y) = ||x - y||, \quad \forall x, y \in X.$$

Uređeni par (X, d) je *metrički prostor*, a za funkciju d se kaže da je *metrika definisana normom* ili da je *prirodna metrika* na normiranom prostoru X.

Kako je normiran prostor $(X, ||\cdot||)$ ujedno i metrički prostor (X, d), to se svi pojmovi i stavovi za metričke prostore na prirodan način prenose i na normirane prostore. Na primer, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $(X, ||\cdot||)$ konvergira ka $x \in X$ ako niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u (X, d), tj. ako važi:

$$d(x_n, x) = ||x_n - x|| \to 0, \ n \to +\infty.$$

Definicija 1.15. Normiran prostor X je *Banahov* ako je (X, d) kompletan metrički prostor, gde je d metrika definisana normom.

Primer 1.6. U $\mathbb{R}^n$ su norme $||\cdot||_p$ $(p \geq 1)$ i $||\cdot||_\infty$ definisane sa:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ sa prethodno definisanim normama je Banahov prostor.

Primer 1.7. Neka je ℓ^∞ vektorski prostor ograničenih nizova $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ sa operacijama sabiranja i množenja koje su definisane na sledeći način:

Ako je $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ i $\alpha \in F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ tada je

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \quad \alpha x = \{\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

U prostoru ℓ^∞ definisana je norma

$$||\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}||_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Prostor ℓ^∞ sa prethodno definisanom normom je takođe Banahov prostor.

Primer 1.8. Prostor $C_{[a,b]}$ neprekidnih realnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je Banahov prostor ako je norma u $C_{[a,b]}$ definisana na sledeći način:

$$||f||_{C_{[a,b]}} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in C_{[a,b]}.$$

Svaki končno-dimenzionalni potprostor Y normiranog prostora X je kompletan tj. Banahov. Specijalno, svaki konačno-dimenzionalan normiran prostor je kompletan. Svaki konačno-dimenzionalan potprostor Y normiranog prostora X je zatvoren u X.

Glava 2

Generalizovani metrički prostori

U ovoj glavi doktorske disertacije predstavljamo neka uopštenja metričkih prostora, kao što su: b-metrički prostori, skoro b-metrički prostori, konusni prostori, M-konusni metrički prostori koji predstavljaju generalizaciju M-metričkog prostora i konusnog metričkog prostora nad Banahovom algebrom i super metrički prostori i navodimo neka bitna svojstva koja za njih važe.

2.1 b-metrički prostori

Francuski matematičar Freše[20] pokrenuo je proučavanje metričkih prostora u svom radu 1906. godine [36]. Različite generalizacije meteičkih prostora date su u [58] i [67]. U [58] Đuro Kurepa[21] uveo je tzv. pseudodistancijalne prostore uzimajući za razmake izmedju tačaka ne realne brojeve, već elemente nekog uredjenog skupa sa najmanjim elementom. Kasnije su u [20] uvedeni

[20]René Maurice Fréchet (1878–1973)
[21]Đuro Kurepa 1907–1993

b-metrički prostori i data preslikavanja koja predstavljaju generalizaciju Banahovog principa kontrakcije. Nedugo zatim u [25], 1993. godine, proširen je koncept b-metričkih prostora, a zatim je uveden pojam parcijalne b-metrike u [91] 2014. godine. Koncept parcijalnih metričkih prostora uveden je 1994. godine [66], kao generalizacija standardnih metričkih prostora u kojima je zamenjen uslov $d(x,x) = 0$ uslovom $d(x,x) \leq d(x,y)$, za sve x, y iz tog prostora.

Definicija 2.1. ([20], [25]) b-metrika na nepraznom skupu X je funkcija $b : X \times X \to [0, +\infty)$ koja za svako $x, y, z \in X$ i $s \geq 1$, zadovoljava sledeće uslove:

(b1) $b(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(b2) $b(x,y) = b(y,x)$;

(b3) $b(x,z) \leq s(b(x,y) + b(y,z))$.

Par (X, b) se naziva *b-metrički prostor* sa koeficijentom s.

Za $s = 1$ b-metrički prostor je upravo metrički prostor, tako da su metrički prostori zapravo podprostori b-metričkih prostora . Međutim, postoje b-metrički prostori koji nisu metrički.

Primer 2.1. ([80]) Neka je

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

i $d : X^2 \to [0, +\infty)$ funkcija definisana na sledeći način:

$$d(x_1, x_2) = t \geq 2, \quad d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_4) = 1,$$

$$d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i), \text{ za } i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ i } d(x_i, x_i) = 0, \text{ za } i = 1, 2, 3, 4.$$

Onda je

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{t}{2}[d(x_i, x_k) + d(x_k, x_j)], \text{ za } i, j, k = 1, 2, 3, 4,$$

pa za $s = \frac{t}{2} > 1$ očigledno ne važi aksioma trougla u definiciji metričkog prostora, tj. d nije metrika na skupu X, ali je b-metrika na istom.

Definicija 2.2. Neka je (X, d) b-metrički prostor. Za niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da je:

(a) Konvergentan: ako i samo ako postoji $x \in X$ tako da je $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. U tom slučaju pišemo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(b) Košijev: ako i samo ako je $\lim\limits_{m,n\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

U b-metričkom prostoru (X, d) važe sledeća tvrđenja:

(a) Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost;

(b) Svaki konvergentan niz je Košijev;

(c) U opštem slučaju b metrika nije neprekidna funkcija;

(d) U opštem slučaju b-metrika ne indukuje topologiju na X;

(e) b-metrički prostor (X, d) je b-kompletan ako je svaki b-Košijev niz u X konvergentan u X.

Sada ćemo navesti nekoliko definicija i lema koje su od suštinskog značaja za dokaze teorema o nepokretnoj tački u okviru b-metričkih prostora.

Lema 2.1. [4] *Neka je* (X,d) *b-metrički prostor sa* koeficijentom $s \geq 1$ *i* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* X *tako da je* $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. *Ako* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *nije b-Košijev niz, tada postoji* $\varepsilon > 0$ *i dva niza pozitivnih celih brojeva* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *i* $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tako da sledeća četiri niza*

$$\{d(x_{m_k}, x_{n_k})\}\ , \{d(x_{m_k}, x_{n_k+1})\}, \tag{2.1}$$

$$\{d(x_{m_k+1}, x_{n_k})\}\ , \{d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})\} \tag{2.2}$$

postoje, pri čemu zadovoljavaju sledeće nejednakosti:

$$\varepsilon \leq \lim\inf_{k\to+\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \lim\sup_{k\to+\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \varepsilon s,$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \lim\inf_{k\to+\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq \lim\sup_{k\to+\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq \varepsilon s^2,$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leq \lim\inf_{k\to+\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k}) \leq \lim\sup_{k\to+\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k}) \leq \varepsilon s^2,$$

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leq \lim\inf_{k\to+\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq \lim\sup_{k\to+\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \leq \varepsilon s^3.$$

Posledica 2.1. *Ako u prethodnoj lemi uzmemo da je* $s = 1$, *dobijamo da svi nizovi u (2.1) i (2.2) teže* ε^+ *kada* $k \to +\infty$.

Lema 2.2. [4] Neka je (X,d) metrički prostor i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X tako da $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$, kada $n \to +\infty$. Ako $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije Košijev niz u X, tada postoji $\varepsilon > 0$ i dva niza $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pozitivnih celih brojeva, tako da je $n_k > m_k > k$ pri čemu nizovi

$$\{d(x_{m_k}, x_{n_k})\},\ \{d(x_{m_k}, x_{n_k+1})\},\ \{d(x_{m_k-1}, x_{n_k})\},$$

$$\{d(x_{m_k-1}, x_{n_k})\},\ \{d(x_{m_k}, x_{n_k+1})\}$$

teže ka ε^+, kada $k \to +\infty$.

Lema 2.3. [4] *Neka je (X,d) b-metrički prostor sa* koeficijentom $s \geq 1$. *Pretpostavimo da su $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b-konvergentni sa granicama x i y redom. Tada imamo*

$$\frac{1}{s^2} d\left(x,y\right) \leq \lim \inf_{n\to+\infty} d\left(x_n,y_n\right) \leq \lim \sup_{n\to+\infty} d\left(x_n,y_n\right) \leq s^2 d\left(x,y\right).$$

U slučaju da je $x=y$, imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} d\left(x_n,y_n\right)=0$. Štaviše, za svako $z\in X$ imamo

$$\frac{1}{s} d\left(x,z\right) \leq \lim \inf_{n\to+\infty} d\left(x_n,z\right) \leq \lim \sup_{n\to+\infty} d\left(x_n,z\right) \leq s d\left(x,z\right).$$

Lema 2.4. [52] Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u b-metričkom prostoru (X,d) sa parametrom $s\geq 1$, tako da je

$$d\left(x_n,x_{n+1}\right) \leq \lambda d\left(x_{n-1},x_n\right) \quad n=1,2,3,\ldots,$$

za neko $\lambda\in[0,\frac{1}{s})$. Tada je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b-Košijev niz. Ako je (X,d) b-kompletan, tada $x_n\to u$ $(n\to+\infty)$, $u\in X$ i imamo procenu

$$d(x_n,u) \leq \frac{s^2\lambda^n}{1-\lambda s} d(x_1,x_0) \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

Sada navodimo mnogo suptilniji i pogodniji rezultat u odnosu na prethodne leme.

Lema 2.5. [4] *Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u b-metričkom prostoru (X,d) sa $s\geq 1$, tako da je*

$$d\left(x_n,x_{n+1}\right) \leq \mu d\left(x_{n-1},x_n\right),$$

za neko $\mu \in [0,1)$ *i za svako* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\{x_n\}$ *b-Košijev niz u* (X,d).

U b-metričkom prostoru (X,d) možemo uvesti topologiju ako definišemo zatvorene skupove.

Definicija 2.3. [21] Neka je (X,d) b-metrički prostor. Ako je Y neprazan podskup od X, onda se adherencija $\overline{Y}$ skupa Y definiše sa

$$\overline{Y} = \{x \in X : \text{ postoji niz } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ u } Y \text{ tako da } x_n \to x,\ n \to +\infty\}.$$

Definicija 2.4. [21] Neka je (X,d) b-metrički prostor. Skup $Y \subset X$ $(Y \neq \emptyset)$ je zatvoren ako i samo ako je $Y = \overline{Y}$.

Definicija 2.5. [21] Neka su (X,d) i (X',d') dva b-metrička prostora onda je funkcija $f : X \to X'$ b-neprekdina u tački $x \in X$ ako je f b-nizovno neprekidna u tački x, tj. ako važi:

$$x_n \to x \ \ (n \to +\infty) \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \ \ (n \to +\infty).$$

Definicija 2.6. Neka je (X,d) b-metrički prostor. $A \subset X$ je b-kompaktan skup ako i samo ako svaki niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u A ima b-konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tako da

$$x_{n_k} \to x,\ \ k \to +\infty,\ \ x \in A.$$

2.2 Skoro b-metrički prostori

Generalizacija skoro metričkih prostora (eng. metric like spaces), b-metričkih prostora i parcijalnih metričkih prostora dovodi do koncepta skoro b-metričkih prostora (eng. b-metric like spaces) koji je nedavno uveden (videti [9]). Razlika između metričkih prostora i skoro metričkih prostora je u tome što kod metričkih prostora važi da je $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$, dok kod skoro metričkih prostora važi samo implikacija u desno, tj. ako je $d(x, y) = 0$, tada je $x = y$. Definiciju parcijalnih metričkih prostora prikazaćemo u sledećem potpoglavlju. Topološka struktura skoro b-metričkih prostora istaživana je u [48], gde su i dokazane neke teoreme o nepokretnoj tački u skoro b-metričkim prostorima. Za detaljnije proučavanje preporučujemo neke druge radove, kao što su [39], [40].

Definicija 2.7. ([9]) Skoro b-metrika na nepraznom skupu X je funkcija

$$b : X \times X \to [0, +\infty)$$

koja za proizvoljne $x, y, z \in X$ i $s \geq 1$, zadovoljava sledeće uslove:

(b1) Ako je $b(x, y) = 0$, tada je $x = y$;

(b2) $b(x, y) = b(y, x)$;

(b3) $b(x, z) \leq s(b(x, y) + b(y, z))$.

Par (X, b) se naziva *skoro b-metrički prostor.*

Navodimo sada neke bitne osobine koje važe u ovim prostorima.

Svaka skoro b-metrika generiše topologiju $\mathcal{T}_b$ na X koja za bazu ima familiju otvorenih b-lopti datih sa

$$B_b(x, \varepsilon) = \{y \in X : |b(x, y) - b(y, y)| < \varepsilon\},$$

za svako $x \in X$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 2.8. [9] Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u skoro b-metričkom prostoru (X, b) *konvergira* ka tački $x \in X$ ako i samo ako važi

$$b(x, x) = \lim_{n\to+\infty} b(x, x_n).$$

Definicija 2.9. [9] Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u skoro b-metričkom prostoru (X, b) se naziva *Košijev niz* ako postoji $\lim\limits_{m,n\to+\infty} b(x_m, x_n)$ i konačan je.

Definicija 2.10. [9] Za skoro b-metrički prostor (X, b) kažemo da je *b-kompletan* ako svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ konvergira ka tački $x \in X$ tako da je

$$\lim_{n\to+\infty} b(x, x_n) = \lim_{n\to+\infty} b(x, x) = \lim_{m,n\to+\infty} b(x_m, x_n).$$

Definicija 2.11. [9] Neka je (X, b) skoro b-metrički prostor. Za preslikavanje $T : X \to X$ kaže se da je *neprekidno* u tački $x \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da je

$$T(B_b(x, \delta)) \subseteq B_b(Tx, \varepsilon).$$

Kažemo da je preslikavanje T *neprekidno na celom skupu* X ako je T neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

Lema 2.6. [9] Neka je (X, b) skoro b-metrički prostor sa koeficijentom $s \geq 1$.

Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u (X, b) tako da je

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha b(x_{n-1}, x_n),$$

za neko α, $0 < \alpha < \frac{1}{b}$, i svako $n = 1, 2, \dots$ Tada je

$$\lim_{m,n\to+\infty} b(x_m, x_n) = 0.$$

2.3 Konusni metrički prostori nad Banahovom algebrom

Matthews je 1994. godine uveo pojam parcijalnog metričkog prostora (videti [66]). U ovom prostoru, uobičajna metrika je zamenjena parcijalnom metrikom sa jedinstvenim svojstvom da samoudaljenost bilo koje tačke prostora ne mora biti jednaka nula. Huang i Zhang, [46], su 2007. godine uveli koncept konusnih metričkih prostora kao generalizaciju metričkih prostora. Takođe su dokazali Banahov princip kontrakcije u postavljanju konusnih metričkih prostora nad normalnim konusom. Da bi generalizovali, Rezapour i Hamlbarani, [84], izostavili su pretpostavku normalnosti konusa datu u [46] i predstavili nekoliko primera koji potkrepljuju postojanje konusa koji nisu normalni, što pokazuje da su rezultati u postavljanju konusnih metričkih prostora prikladni samo ako konus u osnovi nije nužno normalan. Nakon toga su Liu i Xu, [63], 2013. godine uveli pojam konusnog metičkog prostora nad Banahovom algebrom zamenjujući Banahov prostor E, Banahovom algebrom A, što jasno ukazuje da postojanje nepokretnih tačaka za preslikavanja u konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom nisu ekvivalentni sa metričkim prostorima. Štaviše, dali su neke primere da razjasne svoje rezultate. Mnogi autori su svoju pažnju posvetili generalizaciji konusnih metričkih prostora (videti [34], [35]). U 2014. godini Asadi, [12], uveo je koncept M-metričkog prostora koji je generalizacija parcijalnog metričkog prostora i uspostavio neke rezultate nepokretne tačke za generalizovanu kontrakciju.

Sada ćemo definisati neke osnovne pojmove u vezi sa Banahovom algebrom i konusnim metričkim prostorima.

Neka A uvek označava realnu Banahovu algebru.

Definicija 2.12. Banahova algebra A je realan Banahov prostor u kome je definisana operacija množenja, sa sledećim osobinama (za sve $\mu, \nu, \upsilon \in A, \alpha \in R$)

1. $(\mu\nu)\upsilon = \mu(\nu\upsilon)$,
2. $\mu(\nu + \upsilon) = \mu\nu + \mu\upsilon$ i $(\mu + \nu)\upsilon = \mu\upsilon + \nu\upsilon$,
3. $\alpha(\mu\nu) = (\alpha\mu)\nu = \mu(\alpha\nu)$,
4. $\| \mu\nu \| \leq \| \mu \| \| \nu \|$.

Pretpostavićemo da Banahova algebra ima jedinicu (tj. neutralni element) e, odnosno da važi

$$e\mu = \mu e = \mu$$

za svako $\mu \in A$. Za element $\mu \in A$ se kaže da je *invertibilan* ako postoji inverzni element $\nu \in A$ tako da je

$$\mu\nu = \nu\mu = e.$$

Inverz od μ je označen sa μ^{-1}. Za više detalja, upućuejemo čitaoca na [88].

Propozicija 2.1. [88] Neka je A Banahova algebra sa jedinicom e i $\mu \in A$. Ako je spektralni poluprečnik $\rho(\mu)$ manji od 1, tj.

$$\rho(\mu) = \lim_{n\to+\infty} \|\mu^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|\mu^n\|^{\frac{1}{n}} < 1.$$

tada je element $e - \mu$ invertibilan, odnosno

$$(e-\mu)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu^i.$$

Napomena 2.1. [88] Spektralni poluprečnik $\rho(\mu)$ zadovoljava $\rho(\mu) \leq \|\mu\|$ za svako $\mu \in A$, gde je A Banahova algebra sa jedinicom e.

Napomena 2.2. [96]. Ako u propoziciji 2.1 uslov $\rho(\mu) < 1$ zamenimo sa uslovom $\|\mu\| \leq 1$, onda zaključak ostaje isti.

Napomena 2.3. [96] Ako je $\rho(\mu) < 1$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu^n\| = 0.$$

Sada ćemo se podsetiti koncepta konusa nad Banahovom algebrom.

Definicija 2.13. Podskup P od A naziva se konus ako važi sledeće:

1. P je neprazan, zatvoren i $\{\theta, e\} \subset P$;
2. $\alpha P + \beta P \subset P$ za sve nenegativne realne brojeve α, β;
3. $P^2 = PP \subset P$;
4. $P \cap (-P) = \{\theta\}$,

gde θ označava nulu Banahove algebre A.

Za dati konus $P \subset A$ definišemo parcijalno uređenje $\preceq$ na P sa

$$\mu \preceq \nu \text{ ako i samo ako } \nu - \mu \in P.$$

Relacija $\mu \prec \nu$ će važiti za $\mu \preceq \nu$ i $\mu \neq \nu$, dok će $\mu \ll \nu$ važiti za

$$\nu - \mu \in \operatorname{Int} P,$$

gde $\operatorname{Int} P$ označava unutrašnjost skupa P. Ako je $\operatorname{Int} P \neq \emptyset$, tada se P naziva *čvrst konus.*

Za konus P kaže se da je *normalan* ako postoji $M > 0$ tako da za svako $\mu, \nu \in A$ za koje je

$$\theta \preceq \mu \preceq \nu,$$

važi

$$\parallel \mu \parallel \leq M \parallel \nu \parallel .$$

Najmanji pozitivan broj M koji zadovoljava gore navedenu nejednakost naziva se *normalna konstanta* od P ([46]).

Pre nego definišemo konusnu metriku nad Banahovom algebrom A, definisaćemo je najpre nad Banahovim prostorom, kojeg ćemo označavati sa E, i shodno tome parcijalno uređenje $\preceq$ u prostoru E. Takođe navešćemo nekoliko primera i bitnih svojstava.

Definicija 2.14. [64] Neka je X neprazan skup. Pretpostavimo da preslikavanje
$d : X \times X \to E$ zadovoljava:

(1) $\theta \prec d(x, y)$ za svako $x, y \in X$ i $d(x, y) = \theta$ ako i samo ako $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ za svako $x, y \in X$,

(3) $d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$ za svako $x, y, z \in X$.

Tada se d naziva *konusna metrika* na X, a (X, d) se naziva *konusni metrički prostor*.

Primer 2.2. [64] Neka je $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$ i $d : X^2 \to E$ definisano pomoću $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$, gde je $\alpha > 0$ konstanta. Onda je (X, d) konusni metrički prostor.

Primer 2.3. [83] Neka je $X \neq \emptyset$, $E = \mathbb{R}$ i $P = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$. Tada je konusni metrički prostor (X, d) obični metički prostor.

Primer 2.4. Neka je $E = c_0$, $P = \{x = \xi_\nu \in c_0 : \ \xi_\nu \geq 0, \ \nu = 1, 2, \ldots\}$ i $\{\alpha_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ fiksiran pozitivan nula-niz, tj. $\alpha_\nu > 0$, $\alpha_\nu \to 0$ $(\nu \to +\infty)$. Neka je (X, ρ) metrički prostor i $d : X^2 \to \mathbb{R}$ definisano pomoću $d(x, y) = \{\alpha_\nu \rho(x, y)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$. Onda je (X, d) konusni metrički prostor.

Prethodni primer pokazuje da je kategorija konusnih metričkih prostora veća od kategorije običnih metričkih prostora.

Definicija 2.15. [64] Neka je (X, d) konusni metrički prostor, $x \in X$ i $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz u X. Tada:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergira* ka x ako i samo ako za svako $c \gg \theta$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) \ll c.$$

   Ovo označavamo sa $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ ili $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$.

2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je *Košijev* niz ako i samo ako za svako $c \gg 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$m > n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) \ll c.$$

3. (X, d) je *kompletan konusni metrički prostor* ako je svaki Košijev niz u njemu konvergentan.

Lema 2.7. [64] Neka je (X, d) konusni metrički prostor i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X. Tada važi:

$$d(x_n, x) \to \theta \ (n \to +\infty) \text{ u } E \ \Rightarrow \ x_n \to x \ (n \to +\infty) \text{ u } (X, d).$$

Prethodno navedeno važi ukoliko je konus P čvrst. S druge strane ako je konus P normalan onda imamo obrnutu implikaciju tj.

$$x_n \to x \ (n \to +\infty) \text{ u } (X, d) \ \Rightarrow \ d(x_n, x) \to \theta \ (n \to +\infty) \text{ u } E.$$

Lema 2.8. Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u konusnom metričkom prostoru (X, d). Tada

$$x_n \to x \wedge y_n \to y \ \Rightarrow \ x = y.$$

Lema 2.9. [64] Neka je (X, d) konusni metrički prostor i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X. Tada važi:

$$d(x_m, x_n) \to \theta \ (m, n \to +\infty) \text{ u } E \ \Rightarrow \ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ je Košijev u } (X, d).$$

Prethodno navedeno važi ukoliko je konus P čvrst. Ako je konus P normalan, onda imamo obrnutu implikaciju tj.

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ je Košijev u } (X, d) \ \Rightarrow \ d(x_m, x_n) \to \theta \ (m, n \to +\infty) \text{ u } E.$$

Lema 2.10. Ako Košijev niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u konusnom metričkom prostoru (X, d) ima konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tako da $x_{n_k} \to x \ (k \to +\infty)$, tada $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$.

U nastavku uvek pretpostavljamo da je A Banahova algebra sa jedinicom e, P je čvrst konus u A i $\preceq$ je parcijalno uređenje na P.

Definicija 2.16. [63] Neka je X neprazan skup. Pretpostavimo da preslikavanje
$d : X \times X \to A$ zadovoljava sledeće uslove:

(1) $\theta \prec d(\mu, \nu)$ za sve $\mu, \nu \in X$ i $d(\mu, \nu) = \theta$ ako i samo ako $\mu = \nu$,

(2) $d(\mu, \nu) = d(\nu, \mu)$ za sve $\mu, \nu \in X$;

(3) $d(\mu, \nu) \preceq d(\mu, \upsilon) + d(\upsilon, \nu)$ za sve $\mu, \nu, \upsilon \in X$.

Tada se d naziva *konusna metrika* na X, a (X, d) se naziva *konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom* A.

Definicija 2.17. [34] *Parcijalna konusna metrika* na nepraznom skupu X je funkcija
$p : X \times X \to A$ tako da za svako $\mu, \nu, \upsilon \in X$, važe sledeći uslovi:

(p_1) $\mu = \nu$ ako i samo ako $p(\mu, \mu) = p(\mu, \nu) = p(\nu, \nu)$,

(p_2) $p(\mu, \mu) \preceq p(\mu, \nu)$,

(p_3) $p(\mu, \nu) = p(\nu, \mu)$,

(p_4) $p(\mu, \nu) \preceq p(\mu, \upsilon) + p(\upsilon, \nu) - p(\upsilon, \upsilon)$.

Par (X, p) se naziva *parcijalni konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom.* Jasno je da, ako je $p(x, y) = \theta$, tada iz uslova (p_1) i (p_2), sledi da je $\mu = \nu$. Ali, ako je $\mu = \nu$, tada $p(\mu, \nu)$ ne mora biti jednako θ.

Definicija 2.18. [12] Neka je X neprazan skup. Funkcija $m : X \times X \to \mathbb{R}^+$ se naziva *M-metrika* ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

$(m1)$ $m(\mu,\mu) = m(\nu,\nu) = m(\mu,\nu)$ ako i samo ako $\mu = \nu$,

$(m2)$ $m_{\mu\nu} \leq m(\mu,\nu)$,

$(m3)$ $m(\mu,\nu) = m(\nu,\mu)$,

$(m4)$ $\Big(m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu}\Big) \leq \Big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\Big) + \Big(m(\upsilon,\nu) - m_{\upsilon\nu}\Big)$.

Par (X, m) se naziva *M-metrički prostor.*

2.4 M-konusni metrički prostori nad Banahovom algebrom

U ovom potpoglavlju predstavljamo koncept M-konusnih metričkih prostora nad Banahovom algebrom sa odgovarajućim primerima i proučavamo neka od svojstava za ove prostore koje ćemo kasnije koristiti.

Neka je dat neprazan skup X i funkcija $m : X \times X \to \mathbb{R}^+$ i neka je $m_{\mu\nu} = \min\big\{m(\mu,\mu), m(\nu,\nu)\big\}$ i $M_{\mu\nu} = \max\big\{m(\mu,\mu), m(\nu,\nu)\big\}$.

Definicija 2.19. Neka je X neprazan skup. Funkcija $m : X \times X \to A$ se naziva *M- konusna metrika* ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

(m_1) $m(\mu,\mu) = m(\nu,\nu) = m(\mu,\nu)$ ako i samo ako $\mu = \nu$,

(m_2) $m_{\mu\nu} \preceq m(\mu,\nu)$

(m_3) $m(\mu,\nu) = m(\nu,\mu)$

(m_4) $\Big(m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu}\Big) \preceq \Big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\Big) + \Big(m(\upsilon,\nu) - m_{\upsilon\nu}\Big)$.

Tada se par (X, m) naziva *M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom.*

Na osnovu Definicije 2.17 uslov (p_1) menja se u (m_1), a uslov (p_2) se izražava sa $p(\mu,\mu)$, gde $p(\nu,\nu) = \theta$ može postati $p(\nu,\nu) \neq \theta$. Dati uslov unapređujemo tako što ga zamenjujemo sledećim uslovom

$$\min\left\{p(\mu,\mu), p(\nu,\nu)\right\} \preceq p(\mu,\nu).$$

Pored toga unapređujemo i uslov (p_4) tako što ga proširujemo na oblik dat sa (m_4).

Dakle, svaki parcijalni konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom je i M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom, ali obrnuto ne mora da važi.

Napomena 2.4. Za sve $\mu,\nu \in X$ važi

1. $\theta \preceq M_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} = m(\mu,\mu) + m(\nu,\nu)$,
2. $\theta \preceq M_{\mu\nu} - m_{\mu\nu} =\mid m(\mu,\mu) + m(\nu,\nu) \mid$,
3. $M_{\mu\nu} - m_{\mu\nu} \preceq (M_{\mu\upsilon} - m_{\mu\upsilon}) + (M_{\upsilon\nu} - m_{\upsilon\nu})$.

Navodimo primer M-konusnog metričkog prostora koji nije parcijalni konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom.

Primer 2.5. Neka je $A = C_R'[0,1]$ sa normom definisanom sa

$$\parallel \mu \parallel = \parallel \mu \parallel_\infty + \parallel \mu' \parallel_\infty$$

sa uobičajnim množenjem, gde je A realna jedinična Banahova algebra sa jedincom $e = 1$. Razmotrimo konus u A definisan na sledeći način

$$P = \{\mu \in A : \mu \geq 0\}.$$

Štaviše, P nije normalan konus ([96]). To sledi iz činjenice: Neka je $k \geq 1$,

$\mu(x) = x$ i $\nu(x) = x^{2k}$. Tada je $0 \leq \nu \leq \mu$, $||\mu|| = 2$ i $||\nu|| = 2k+1$. Kako je $k \cdot ||\mu|| \leq ||\nu||$ sledi k nije normalna konstanta za P. Prema tome, konus P nije normalan konus.

Neka je $X = [0, +\infty)$. Definišemo $m : X \times X \to A$ sa

$$m(\mu, \nu)(t) = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right) e^t,$$

za sve $\mu, \nu \in X$. Tada:

(i) Osobine $(m_1), (m_2)$ i (m_3) iz Definicije 2.19 se lako dokazuju. Osobina (m_1) važi jer je

$$m(\mu, \nu) = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right) e^t = \mu e^t = \nu e^t \iff \mu = \nu,$$

pa važi (m_1).

Da bismo dokazali da važi (m_2) razmotrićemo dva slučaja:

1. Ako je $m_{\mu\nu} = \min\{m(\mu, \mu), m(\nu, \nu)\} = m(\mu, \mu) = \mu e^t$, tada je

$$m(\mu, \mu) = \mu e^t \preceq \nu e^t = m(\nu, \nu),$$

   pa je

$$m_{\mu\nu} \preceq \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right) e^t = m(\mu, \nu).$$

2. Ako je $m_{\mu\nu} = \min\{m(\mu, \mu), m(\nu, \nu)\} = m(\nu, \nu) = \nu e^t$, tada je

$$m(\nu, \nu) = \nu e^t \preceq \mu e^t = m(\mu, \mu),$$

pa je i u ovom slučaju

$$m_{\mu\nu} \preceq \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t = m(\mu,\nu).$$

Dakle, važi i (m_2). Primetimo da $m(\mu,\mu) \preceq m(\mu,\nu)$ ne važi za svako μ i ν, jer je relacija

$$m(\mu,\mu) = \mu e^t \preceq \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t = m(\mu,\nu)$$

tačna samo ako je $\mu \preceq \nu$, odakle odmah vidimo da uslov (p_2) u definiciji parcijalne konusne metrike nije ispunjen. U nastavku ćemo dalje pisati

$$m(\mu,\nu)(t) = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right).$$

(ii) Kako bismo dokazali osobinu (m_4), bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $\mu \preceq \nu \in X$. Tada važi

$$m_{\mu\nu} = \mu$$

i

$$m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu} = \frac{\mu+\nu}{2} - \mu = \frac{\nu-\mu}{2}.$$

Neka je $\upsilon \in X$ tako da važi:

Slučaj 1: Ako je $\mu \preceq \nu \preceq \upsilon$, tada je

$$\big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\big) + \big(m(\upsilon,\nu) - m_{\upsilon\nu}\big) = \frac{\upsilon-\mu}{2} + \frac{\upsilon-\nu}{2} \succeq \frac{\upsilon-\mu}{2} \succeq$$

$$\succeq \frac{\nu-\mu}{2} = m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu}.$$

Slučaj 2: Ako je $\mu \preceq \upsilon \preceq \nu$, tada je

$$\big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\big) + \big(m(\upsilon,\nu) - m_{\upsilon\nu}\big) = \frac{\upsilon-\mu}{2} + \frac{\nu-\upsilon}{2} =$$

$$= \frac{\nu-\mu}{2} = m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu}.$$

Slučaj 3: Ako je $\upsilon \preceq \mu \preceq \nu$, tada je

$$\big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\big) + \big(m(\upsilon,\nu) - m_{\upsilon\nu}\big) = \frac{\mu-\upsilon}{2} + \frac{\nu-\upsilon}{2} \succeq$$

$$\succeq \frac{\nu-\upsilon}{2} \succeq \frac{\nu-\mu}{2} = m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu}.$$

Jasno, ako je $\mu \prec \nu \in X$, tada

$$\mu \prec \frac{\mu+\nu}{2} \prec \nu,$$

tj.

$$m_{\mu\nu} \prec m(\mu,\nu) \prec m(\nu,\nu).$$

Tada je m M-konusna metrika na X, ali nije parcijalna konusna metrika nad Banahovom algebrom.

2.4.1 Topologija na M-konusnom metričkom prostoru nad Banahovom algebrom

Definicija 2.20. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Tada je za $\mu \in X$ i $c > \theta$ m-otvorena lopta sa centrom u μ i poluprečnikom $c > \theta$ data sa

$$B_m(\mu, c) = \big\{\nu \in X : m(\mu, \nu) + m(\nu, \nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu, \mu) \ll c\big\}.$$

Napomena 2.5. Primetimo da je za $\mu = \mu$

$$m(\mu, \mu) + m(\mu, \mu) - m(\mu, \mu) - m_{\mu\mu} = \theta,$$

tj. za svako $c > \theta$, $\mu \in B_m(\mu, c)$. Pored toga, ako za neke $\mu, \nu \in X$ važi

$$m_{\mu\nu} = m(\nu, \nu) \preceq m(\mu, \nu) \preceq m(\mu, \mu),$$

tada je

$$\begin{aligned} m(\mu, \nu) + m(\nu, \nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu, \mu) &= \big(m(\mu, \nu) - m(\mu, \mu)\big) + \big(m(\nu, \nu) - m_{\mu\nu}\big) = \\ &= m(\mu, \nu) - m(\mu, \mu) \preceq \theta. \end{aligned}$$

Dakle, svaka m-otvorena lopta sa centrom u μ sadrži ν.

Lema 2.11. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Familija svih m-otvorenih lopti na X

$$\mathfrak{B} = \big\{B_m(\mu, c) : \mu \in M \text{ i } \theta \ll c\big\}$$

čini bazu na X.

Dokaz. Neka je za svako $\mu \in X$ i $\theta \ll c$, $\nu \in B_m(\mu, c)$. Tada je

$$m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu,\mu) \prec c.$$

Uzmimo da je

$$\delta = c - m(\mu,\nu) - m(\nu,\nu) + m_{\mu\nu} + m(\mu,\mu) \succ \theta. \tag{4.1}$$

Tvrdimo da važi

$$B_m(\nu,\delta) \subseteq B_m(\mu,c).$$

Ako je $\upsilon \in B_m(\nu,\delta)$, tada je

$$m(\nu,\upsilon) + m(\upsilon,\upsilon) - m_{\nu\upsilon} - m(\nu,\nu) \prec \delta. \tag{4.2}$$

Otuda, po definiciji M-konusnog metričkog prostora nad Banahovom algebrom važi

$$\begin{aligned} m(\mu,\upsilon) + m(\upsilon,\upsilon) - m_{\mu\upsilon} - m(\mu,\mu) &= \big(m(\mu,\upsilon) - m_{\mu\upsilon}\big) + m(\upsilon,\upsilon) - m(\mu,\mu) \\ &\preceq \big(m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu} + m(\nu,\upsilon) - m_{\nu\upsilon}\big) + m(\upsilon,\upsilon) - m(\mu,\mu) \\ &= \big(m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu,\mu)\big) + \big(m(\nu,\upsilon) + m(\upsilon,\upsilon) - m_{\nu\upsilon} - m(\nu,\nu)\big). \end{aligned}$$

Iz (4.1) i (4.2) dobijamo

$$m(\mu,\upsilon) + m(\upsilon,\upsilon) - m_{\mu\upsilon} - m(\mu,\mu) \prec m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu,\mu) + \delta = c.$$

Dakle, pokazali smo da je

$$B_m(\mu,\delta) \subseteq B_m(\mu,c),$$

što znači da je $\mathfrak{B}$ baza na X. $\square$

Data je M-konusna metrika m na X. Sa τ_m označavamo topologiju generisanu m-otvorenim loptama

$$B_m(\mu,c) = \big\{\nu \in X : m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu,\nu} - m(\mu,\mu) \ll c\big\}.$$

Lema 2.12. Neka je (X,m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Tada za svako $\theta \ll c$, $c \in E$, postoji $\delta > 0$ tako da je $c-\mu \in \operatorname{Int} P$ (tj. $\mu \ll c$), gde je P čvrst konus, kad god je $\| \mu \| < \delta$, $\mu \in E$.

Dokaz. Kako je $\theta \ll c$, to je $c \in \operatorname{Int} P$. Dakle, pronađimo $\delta > 0$ tako da je

$$\big\{\mu \in E : \| \mu - c \| < \delta\big\} \ \subset \ \operatorname{Int} P.$$

Ako je $\| \mu \| < \delta$, tada važi

$$\| (c-\mu) - c \| = \| -\mu \| = \| \mu \| < \delta,$$

odakle imamo $(c-\mu) \in \operatorname{Int} P$, tj. $\mu \ll c$. $\square$

Lema 2.13. Neka je (X,m) M-konusni metrički prostor nad Banahovm algebrom. Tada za svako $c_1 \gg \theta$ i $c_2 \gg \theta$, $c_1, c_2 \in E$, postoji $c \gg \theta$, $c \in E$, tako da je $c \ll c_1$ i $c \ll c_2$.

Dokaz. Neka je $c_2 \gg \theta$. Na osnovu Leme 2.12, odredimo $\delta > 0$, tako da iz

$\| \mu \| < \delta$ sledi $\mu \ll c_2$. Izaberimo n_0 tako da važi

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{\| c_1 \|}.$$

Neka je $c = \dfrac{c_1}{n_0}$. Tada je

$$\|c\| = \left\| \frac{c_1}{n_0} \right\| = \frac{\|c_1\|}{n_0} < \delta,$$

odakle sledi $c \ll c_2$. Takođe je jasno da je $c \gg \theta$ i $c \ll c_1$. □

Teorema 2.1. Svaki M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom (X, m) je topološki prostor.

Dokaz. Neka je za $c \gg \theta$

$$B_m(\mu, c) = \big\{ \nu \in X : m(\mu, \nu) + m(\nu, \nu) - m_{\mu,\nu} - m(\mu, \mu) \ll c \big\}$$

i

$$\mathfrak{B} = \big\{ B_m(\mu, c) : \mu \in X, c \gg \theta \big\},$$

Tada je

$$\tau_m = \big\{ U \subset X : \forall\, \mu \in U,\ \exists\, B \in \mathfrak{B},\ \ \mu \in B \subset U \big\},$$

zaista topologija na X. Naime:

(τ_{m_1}): Očigledno važi da je $\emptyset \in \tau_m$ i $X \in \tau_m$.

(τ_{m_2}): Neka su $U, V \in \tau_m$ i neka $\mu \in U \cap V$. Tada $\mu \in U$ i $\mu \in V$.

Nađimo $c_1 \gg \theta$ i $c_2 \gg \theta$ tako da je

$$\mu \in B_m(\mu, c_1) \subset U \text{ i } \mu \in B_m(\mu, c_2) \subset V.$$

Prema prethodnoj lemi, postoji $c \gg \theta$, tako da je $c \ll c_1$ i $c \ll c_2$. Onda je jasno da je

$$\mu \in B_m(\mu, c) \subset B_m(\mu, c_1) \cap B_m(\mu, c_2) \subset U \cap V.$$

Dakle, $U \cap V \in \tau_m$.

(τ_{m_3}): Neka je $U_i \in \tau_m$ za svako $i \in I$ i neka je $\mu \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Tada postoji $i_0 \in I$ tako da $\mu \in U_{i_0}$. Dakle, postoji $c \gg \theta$ tako da je

$$\mu \in B_m(\mu, c) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

pa sledi da je i $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_m$. □

Definicija 2.21. Za topološki prostor X kaže se da je T_0 prostor i piše se $X \in T_0$ ako za svake dve različite tačke važi da bar jedna od ovih tačaka ima okolinu koja ne sadrži drugu tačku, tj.

$$(\forall x, y \in X, x \neq y)((\exists \text{ okolina } U \ni x) y \notin U \text{ ili } (\exists \text{ okolina } V \ni y) x \notin V))$$

Lema 2.14. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A i neka je P čvrst konus u A, gde je $k \in P$ proizvoljan vektor. Tada je (X, m) T_0-prostor.

Dokaz. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom sa dva različita elementa $\mu, \nu \in X$. Bez gubljenja na opštosti, možemo razmotriti dva slučaja:

Slučaj 1. Ako je $m(\mu,\mu) = m(\nu,\nu)$, tada iz (m_1) i (m_2) i iz $\mu \neq \nu$, imamo

$$m_{\mu\nu} = m(\mu,\mu) = m(\nu,\nu) \prec m(\mu,\nu).$$

Dakle,

$$m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu,\mu) = m(\mu,\nu) - m(\mu,\mu) \succ \theta.$$

Stoga, ako je

$$c = m(\mu,\nu) - m(\mu,\mu),$$

tada $\nu \notin B_m(\mu,c)$.

Slučaj 2. Ako je $m(\mu,\mu) \prec m(\nu,\nu)$, tada iz (m_1) sledi

$$m_{\mu\nu} \preceq m(\mu,\nu),$$

ili

$$m(\mu,\nu) - m_{\mu\nu} \succeq \theta.$$

Dakle,

$$m(\mu,\nu) + m(\nu,\nu) - m_{\mu\nu} - m(\mu,\mu) \succeq m(\nu,\nu) - m(\mu,\mu) \succ \theta.$$

Stoga, ako je

$$c = m(\nu,\nu) - m(\mu,\mu),$$

tada $\nu \notin B_m(\mu,c)$. □

Definicija 2.22. Neka je (X,m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom i $\{\mu_n\}$ niz u X. Ako za svako $c \in \operatorname{Int} P$ postoji pozitivan ceo broj n_0 tako da je $m(\mu_n, \mu) \ll c + m_{\mu_n\mu}$ za svako $n > n_0$, tada za niz $\{\mu_n\}$ kažemo da je *konvergentan* tj. da *konvergira* ka μ.

Definicija 2.23. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Niz $\{\mu_n\}$ u (X, m) se naziva *θ-Košijev niz* ako za svako $c \gg \theta$, postoji $n_0 \in N$ tako da je

$$m(\mu_n, \mu_m) - m_{\mu_n\mu_m} \ll c$$

ili

$$M_{\mu_n\mu_m} - m_{\mu_n\mu_m} \ll c,$$

za sve $n, m \geqslant n_0$.

Definicija 2.24. Nek je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Tada je (X, m) *θ-kompletan* ako svaki θ-Košijev niz $\{\mu_n\}$ u X konvergira tački $\mu \in X$, to jest

$$\lim_{n\to+\infty} M_{\mu\mu_n} = \lim_{n\to+\infty} m_{\mu\mu_n} = m(\mu, \mu) = \theta.$$

Lema 2.15. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom i $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ nizovi u X. Pretpostavimo da $\mu_n \to \mu \in X$ i $\nu_n \to \nu \in X$, kada $n \to +\infty$. Tada

$$\lim_{n\to+\infty} \big(m(\mu_n, \nu_n) - m_{\mu_n\nu_n}\big) = m(\mu, \nu) - m_{\mu\nu}.$$

Dokaz. Imamo

$$\big|\big(m(\mu_n, \nu_n) - m_{\mu_n\nu_n}\big) - \big(m(\mu, \nu) - m_{\mu\nu}\big)\big| =$$

$$= \big|\big(m(\mu_n, \mu) - m_{\mu_n\mu}\big) + \big(m(\mu, \nu_n) - m_{\mu\nu_n}\big) \quad -\big(m(\mu, \nu) - m_{\mu\nu}\big)\big| =$$

$$= |m(\mu_n, \mu) - m_{\mu_n\mu} + m(\nu_n, \nu) - m_{\nu_n\nu}| \preceq$$

$$\preceq |m(\mu_n, \mu) - m_{\mu_n\mu}| + |m(\nu_n, \nu) - m_{\nu_n\nu}| .$$

□

Iz prethodne leme izvodimo sledeću lemu:

Lema 2.16. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom i $\{\mu_n\}$ niz u X. Pretpostavimo da $\mu_n \to \mu \in X$, kada $n \to +\infty$. Tada

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(m(\mu_n, \nu) - m_{\mu_n\nu}\Big) = m(\mu, \nu) - m_{\mu\nu},$$

za svako $\nu \in X$.

Lema 2.17. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom i $\{\mu_n\}$ niz u X. Pretpostavimo da $\mu_n \to \mu \in X$ i $\mu_n \to \nu \in X$, kada $n \to +\infty$. Tada

$$m(\mu, \nu) = m_{\mu\nu}.$$

Štaviše, ako $m(\mu, \mu) = m(\nu, \nu)$, tada je $\mu = \nu$.

Dokaz. Iz prethodne leme imamo

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} \Big(m(\mu_n, \mu_n) - m_{\mu_n\mu_n}\Big) = m(\mu, \nu) - m_{\mu\nu}.$$

□

Lema 2.18. Neka je $\{\mu_n\}$ niz u M-konusnom metričkom prostoru nad Banahovom algebrom (X, m). Tada

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} m(\mu_n, \mu_n) = \theta,$

(ii) $\lim\limits_{n,m\to+\infty} m_{\mu_n\mu_m} = \theta$,

(iii) $\lim\limits_{n,m\to+\infty} M_{\mu_n\mu_m} = \theta$.

2.5 Super-metrički prostori

Definicija 2.25. Neka je X neprazan skup. Funkcija $m : X \times X \to [0, +\infty)$ se naziva super-metrika ako važe sledeći uslovi:

(m_1) Za svako $x, y \in X$ za koje je $m(x, y) = 0$, sledi da je $x = y$,

(m_2) $m(x, y) = m(y, x)$, za svako $x, y \in X$,

(m_3) Postoji $s \geq 1$, tako da za svako $y \in X$ postoje dva različita niza (x_n), $(y_n) \subset X$, gde $m(x_n, y_n) \to 0$, kada $n \to +\infty$, tako da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sup m(y_n, y) \leq s \lim_{n\to+\infty} \sup m(x_n, y).$$

Trojka (X, m, s) se naziva *super-metrički prostor.*

Pojmovi konvergencije, Košijevog niza i kompletnosti super-metričkog prostora definisani su na sledeći način:

Definicija 2.26. U super-metričkom prostoru (X, m, s) niz $\{x_n\}$:

(a) konvergira ka tački $x \in X$ ako i samo ako je

$$\lim_{n\to+\infty} m(x_n, x) = 0,$$

(b) naziva se *Košijev niz* u X ako i samo ako

$$\lim_{n\to+\infty} sup\{m(x_n, x_p) : p > n\} = 0.$$

U super-metričkom prostoru konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.

Definicija 2.27. Super-metrički prostor (X, m, s) je *kompletan* ako i samo ako je u njemu svaki Košijev niz konvergentan.

Teorema 2.2. [53] Neka je (X, m, s) kompletan super-metrički prostor i neka je dato preslikavanje $T : X \to X$. Pretpostavimo da je $0 < \alpha < 1$ tako da važi

$$m(Tx, Ty) \leq \alpha m(x, y),$$

za svako $x, y \in X$. Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Teorema 2.3. [54] Neka je (X, m, s) kompletan super-metrički prostor i $T : X \to X$ preslikavanje, takvo da postoji $k \in [0, 1)$ i važi

$$m(Tx, Ty) \leq k \max\left\{m(x, y), \frac{m(x, Tx)m(y, Ty)}{m(x, y) + 1}\right\}.$$

Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Glava 3

Nepokretna tačka i neka preslikavanja

U ovoj poglavlju uvodimo oznake, osnovne pojmove i rezultate koje ćemo koristiti u ovoj doktorskoj disertaciji. Takođe izučavamo čuvenu Banahovu teoremu o nepokretnoj (fiksnoj) tački, koja se često naziva *Banahov princip kontrakcije*. Za ovaj princip iz 1922. godine vezuje se početak izučavanja teorije nepokretne tačke u metričkim prostorima. Pored klasičnog Banahovog dokaza iz rada [19], izložen je Palaisov dokaz iz rada [74], kao i primene pomenute teoreme pri izučavanju egzistencije rešenja jednačina. Razmatraju se obične jednačine, sistem od n linearnih algebarskih jednačina, diferencijalne jednačine i integralne jednačine.

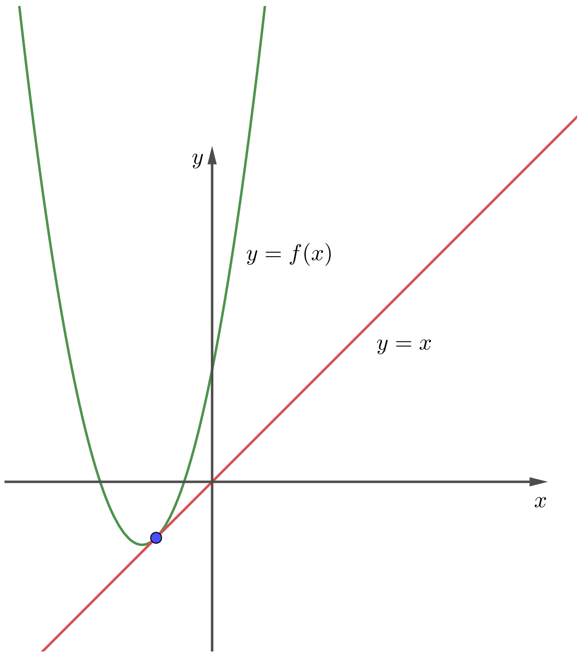
Nepokretne tačke preslikavanja izučavaju se u matematičkoj disciplini poznatijoj kao Teorija o nepokretnim tačkama. Ova teorija je jedna od glavnih grana nelinearne analize. Brojna pitanja fizike, hemije, biologije i drugih nauka vode do različitih diferencijalnih i integralnih jednačina. Ako zanemarimo konkretnu formu tih jednačina, možemo ih svesti na apstraktne operatorske jednačine čime je rešavanje polaznih jednačina svedeno na određivanje fiksnih tačaka operatora.

Takođe, predstavljamo F-kontrakcije, njene generalizje u metričkim i b-metričkim prostorima, kao i pojam generalizovanog Lipšicovog preslikavanja u okviru M-konusnih metričkih prostora nad Banahovom algebrom.

Definicija 3.1. Neka je $X \neq \emptyset$ i $f : X \to X$. Kaže se da funkcija f ima *nepokretnu tačku* ako postoji $x \in X$ tako da je $f(x) = x$.

Skup svih nepokretnih tačaka funkcija f označavamo sa $Fixf$ ili F_f.

Primer 3.1. Neka je $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2 + 5x + 4$. Tada funkcija f ima samo jednu nepokretnu tačku, tj. $F_f = \{-2\}$.



Slika 1. Funkcija sa jednom fiksnom tačkom iz Primera 3.1

Primer 3.2. Ako je $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x$, skup nepokretnih tačaka preslikavanja f je cela realna prava, tj. $F_f = \mathbb{R}$.

U sledećoj teoremi navedene su klase funkcija koje imaju nepokretnu tačku.

Teorema 3.1. ([50]) Neka je $-\infty < a < b < \infty$ i $f : [a, b] \to [a, b]$ neprekidna funkcija. Tada f ima nepokretnu tačku na intervalu $[a, b]$.

Naredna teorema govori o postojanju i jedinstvenosti nepokretne tačke diferencijabilnih funkcija.

Teorema 3.2. ([50]) Neka je $f : [a, b] \to [a, b]$ diferencijabilna funkcija za koju postoji $L \in [0, 1)$ tako da je

$$|f'(x)| \leq L < 1, \quad x \in [a, b].$$

Tada funkcija f ima samo jednu nepokretnu tačku.

3.1 Banahov princip kontrakcije

U ovom potpoglavlju izlažemo čuvenu Banahovu teoremu o nepokretnoj tački koja se često naziva i *Banahov princip kontrakcije*. Za ovaj princip iz 1922. godine vezuje se početak izučavanja teorije nepokretne tačke u metričkim prostorima.

Definicija 3.2. Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \to X$ je

(a) *Lipšicovo (L-Lipšicovo)* ako postoji $L \geq 0$ tako da je

$$d(fx, fy) \leq L \cdot d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X;$$

(b) *kontrakcija (q-kontrakcija)* ako je f, q-Lipšicovo, za $q \in [0, 1)$, tj.

$$d(fx, fy) \leq q \cdot d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X;$$

(c) *neekspanzivno* ako je f 1-Lipšicovo, tj.

$$d(fx, fy) \leq d(x, y);$$

(d) *kontraktivno* ako je

$$d(fx, fy) < d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X, \ x \neq y;$$

(e) *izometrija* ako je

$$d(fx, fy) = d(x, y), \text{ za svako } x, y \in X.$$

Primer 3.3.

1. Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisano sa

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

jeste kontrakcija pri čemu je $F_f = \{6\}$.

2. Preslikavanje $f : [\frac{1}{2}, 2] \to [\frac{1}{2}, 2]$, definisano sa

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

jeste 4-Lipšicovo, pri čemu je $F_f = \{1\}$.

3. Preslikavanje $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, definisano sa

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

jeste kontraktivno, pri čemu je $F_f = \emptyset$

4. Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisano sa

$$f(x) = x + 5$$

je izometrija, pri čemu je $F_f = \emptyset$.

Teorema 3.3. (Banah [19]) (Banahov princip kontrakcije) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ kontrakcija. Tada preslikavanje f ima samo jednu nepokretnu tačku.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna tačka prostora X. Formirajmo niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tačaka prostora X na sledeći način

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Dokažimo da je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev. Neka je $a = d(x_0, x_1)$. Iz

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$\leq \cdots \leq q^n \cdot d(x_0, x_1) = a \cdot q^n,$$

za $m > n$ sledi

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq a \cdot \sum_{k=n}^{m-1} q^k \leq a \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k = a \cdot \frac{q^n}{1-q}. \tag{3.1}$$

Kako je $0 \leq q < 1$, sledi da je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz.
Pošto je prostor X kompletan, sledi da postoji $x \in X$ tako da je

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x,$$

i važi

$$0 \leq d(x_n, f(x)) = d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x).$$

Kako $x_n \to x$, sledi $x_n \to f(x)$, te je $f(x) = x$.

Pokažimo sada jedinstvenost nepokretne tačke. Naime, ako bi postojala neka druga tačka $y \in X$, $y \neq x$, sa svojstvom $f(y) = y$, tada bismo iz

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

dobili

$$(1-q) d(x, y) \leq 0,$$

što je suprotno pretpostavci, jer je $0 \leq q < 1$. □

Dokaz Teoreme 3.3: (Palais [74]) Neka je $x_1, x_2 \in X$. Tada je

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2),$$

odnosno

$$(1-q)d(x_1,x_2) \leq d(x_1,f(x_1)) + d(f(x_2),x_2).$$

Iz gornje nejednakosti dobijamo fundamentalnu kontrakcijsku nejednakost

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{1}{1-q}[d(x_1,f(x_1)) + d(x_2,f(x_2))]. \tag{3.2}$$

Ukoliko su x_1, x_2 nepokretne tačke preslikavanja f, tada iz (3.2) sledi $x_1 = x_2$, tj. kontrakcija može imati najviše jednu nepokretnu tačku.

Neka je $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$, i $x_1 = f^n(x)$, $x_2 = f^m(x)$. Iz (3.2) dobijamo

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq \frac{1}{1-q}[d(f^n(x), f(f^n(x))) + d(f^m(x), f(f^m(x)))] \leq \\ &\leq \frac{q^n + q^m}{1-q} d(x, f(x)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Kako je $0 \leq q < 1$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ i važi $d(f^n(x), f^m(x)) \to 0$, kad $n \to +\infty$ i $m \to +\infty$. Prema tome, Košijev niz $\{f^n(x)\}$ je konvergentan, tj. postoji $p \in X$ tako da je

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p.$$

Zbog neprekidnosti funkcije f, imamo

$$f(p) = f(\lim_{n\to+\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to+\infty} f(f^n(x)) = p.$$

Primetimo da, kada u (3.3) uzmemo da $m \to +\infty$, imamo

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x)).$$

Napomena 3.1. Dokaz Banahovog principa kontrakcije daje metod za nalaženje nepokretne tačke x kontrakcije f, a poznat je pod nazivom Pikarov iterativni proces (ili metod sukcesivnih aproksimacija). Pomenuti metod se sastoji u tome da se polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in X$ ("nulte aproksimacije") formira niz $x_n = f(x_{n-1})$ koji konvergira ka x. Osim toga, kad u (3.1) uzmemo da $m \to +\infty$, sledi

$$d(x_n, x) \leq a\frac{q^n}{1-q},$$

gde je $a = d(x_0, x_1)$. Prethodna nejednakost predstavlja procenu greške koja nastaje kada se tačno rešenje x jednačine $f(z) = z$ zameni približnom vrednošću x_n.

Teorema 3.4. (Lokalna verzija Banahovog principa kontrakcije [50]) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $x_0 \in X$, $r > 0$ i

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Neka je $f : K(x_0, r) \to X$ q kontrakcija, tj. za $q \in [0, 1)$ važi

$$d(fx, fy) \leq q \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in K(x_0, r),$$

i pretpostavimo da je

$$d(fx_0, x_0) < (1-q)r.$$

Tada funkcija f ima jedinstvenu nepokretnu tačku u $K(x_0, r)$.

Sledeći rezultat se odnosi na Banahove prostore.

Teorema 3.5. [50] Neka je X Banahov prostor, $r > 0$ i

$$\overline{K(0, r)} = \{x \in X : ||x|| \leq r\}$$

zatvorena kugla sa centrom u 0 i poluprečnika r u X. Neka je $f : \overline{K(0,r)} \to X$ q-kontrakcija, tj. za $q \in [0,1)$ važi

$$||fx - fy|| \leq q||x - y||, \text{ za svako } x, y \in \overline{K(0,r)}$$

i pretpostavimo da je

$$f(\partial(\overline{K(0,r)})) \subseteq \overline{K(0,r)},$$

gde je $\partial(\overline{K(0,r)})$ rub skupa $\overline{K(0,r)}$. Tada funkcija f ima jedinstvenu nepokretnu tačku u $\overline{K(0,r)}$.

3.2 Primene na egzistenciju rešenja jednačina

Glavni cilj ovog potpoglavlja je ilustracija kako neke važne tipične funkcionalne jednačine primenjene matematike možemo da prevedemo na ekvivalentni problem nepokretne tačke ([50]).

3.2.1 Rešavanje jednačine $f(x) = x, \;\; x \in [a, b]$

Neka je $-\infty < a < b < \infty$ i $f : [a,b] \to [a,b]$. Primenimo Banahov stav na rešavanje jednačine

$$f(x) = x.$$

U tu svrhu pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je

$$|f^{'}(x)| \leq q < 1, \; x \in [a,b],$$

gde je $q \in (0,1)$. Zaista, tada na osnovu Teoreme o srednjoj vrednosti za svako $x, y \in [a,b]$ važi

$$|f(x) - f(y)| = |f^{'}(c)||x-y| \leq q|x-y|,$$

što, s obzirom na definiciju metrike na realnoj pravoj, znači da je f kontrakcija. Prema tome, ako realna funkcija f preslikava $[a,b]$ u $[a,b]$ i

$$|f'(x)| \leq q < 1,$$

jednačina

$$f(x) - x = 0$$

ima u $[a,b]$ jedno i samo jedno rešenje x^*. Ono se sukcesivno može odrediti polazeći od proizvoljnog $x_0 \in [a,b]$, formiranjem niza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$za koji važi

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Pri tome, za približno rešenje x_n važi

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Da bismo u praksi obezbedili da $f(x)$ zadovoljava uslove za primenu Banahovog stava, postupamo na sledeći način. Neka je data jednačina $F(x) = 0$, pri čemu je

$$F(a) < 0, \; F(b) > 0 \text{ i } m \leq F'(x) \leq M,$$

za svako $x \in [a, b]$. Neka je

$$f(x) = x - \lambda F(x),$$

pri čemu ćemo parametar λ ćemo naknadno odrediti. Jednačina $F(x) = 0$ ekvivalentna je jednačini $f(x) = x$, no kako je

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x),$$

to je

$$1 - \lambda M \leq f'(x) \leq 1 - \lambda m.$$

Dalje, λ možemo izabrati tako da je ispunjeno ograničenje za $f'(x)$ koje opravdava primenu Banahovog stava.

3.2.2 Sistemi od n linearnih algebarskih jednačina

Neka je

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \ , \end{aligned}$$

sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih. Napišimo ga u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1\\
x_2 &= -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n + b_2\\
&\vdots\\
x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (1-a_{nn})x_n + b_n.
\end{aligned}$$

Ako je

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij},$$

gde je

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

Kronekerov δ simbol, imamo

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2 \dots, n. \tag{3.4}$$

Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa

$$f(x) = y, \ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

gde su koordinate y_i, $i = 1, 2, \dots n$, određene sa

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nepokretne tačke preslikavanja f su rešenja sistema (3.4). Ostaje još da vidimo pod kojim uslovima će f biti kontrakcija. Odgovor na ovo pitanje zavisi od izbora metrike u prostoru $\mathbb{R}^n$. Razmotrimo tri slučaja:

1) Prostor R^n sa metrikom

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Na osnovu nejednakosti Koši–Bunjakovskog dobijamo

$$d^2(y^{'},y^{''})=\sum_i\big(\sum_j c_{ij}(x^{'}_j-x^{''}_j)^2\big)\le\big(\sum_i\sum_j c_{ij}^2\big)\cdot d^2(x^{'},x^{''}),$$

tj.

$$d(y^{'},y^{''})\le\left(\sum_i\sum_j c_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d(x^{'},x^{''}).$$

Prema tome, uslov kontrakcije je

$$\left(\sum_i\sum_j c_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\alpha<1. \tag{3.5}$$

2) Prostor $\mathbb{R}^n_\infty$ sa metrkom

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|.$$

Sada je

$$d(y',y'')=\max_i|y'_i-y''_i|=\max_i|\sum_j c_{ij}(x'_j-x''_j)|\le\max_i\sum_j|c_{ij}||x'_j-x''_j|\le$$

$$\le\max_i\sum_j|c_{ij}|\max_j|x'_j-x''_j|=(\max_i\sum_j|c_{ij}|)\cdot d(x',x'').$$

Prema tome, f je kontrakcija uz uslov

$$\sum_{j}^{n} |c_{ij}| \leq \alpha < 1, \text{ za } \ i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

3) Prostor $\mathbb{R}_1^n$ sa metrikom

$$d(x, y) = \sum_{i}^{n} |x_i - y_i|.$$

Dobijamo da je

$$d(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i |\sum_j c_{ij}(x'_j - x''_j)| \leq \sum_i \sum_j |c_{ij}||x'_j - x''_j| =$$

$$= \sum_j |x'_j - x''_j| \sum_i |c_{ij}| \leq \max_j \{\sum_i |c_{ij}|\} \cdot \sum_j |x'_j - x''_j| =$$

$$= \max_j \{\sum_i |c_{ij}|\} \cdot d(x', x'').$$

Prema tome, uslov da je f kontrakcija svodi se na

$$\sum_i |c_{ij}| \leq \alpha < 1, \text{ za } j = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Videli smo da uslov kontrakcije, odnosno uslov koji zadovoljava matrica $||c_{ij}||$ da bi preslikavanje bilo kontrakcija, zavisi od metrike na $\mathbb{R}^n$. Svaki od uslova (3.5), (3.6) i (3.7) je samo dovoljan uslov da bi f bila kontrakcija. Bilo koji od njih će biti zadovoljen ako je $|c_{ij}| < \frac{1}{n}$.

3.2.3 Diferencijalne jednačine

Neka je data diferencijalna jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x), \tag{3.8}$$

sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$. Pretpostavimo da u pravougaoniku

$$P = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

važi sledeće:

1) $g(t,x)$ je neprekidna, te je i ograničena tj. $|g| \leq M$,

2) $|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq K \cdot |x_1 - x_2|$.

Pokazaćemo da postoji $h > 0$, tako da u segmentu $[t_0 - h, t_0 + h] = \Delta$ postoji jedinstveno rešenje date diferencijalne jednačine (3.8) koje zadovoljava početni uslov$x(t_0) = x_0$.

Pre svega, posmatranom problemu može se dati i ova formulacija: Pod navedenim pretpostavkama, postoji jedno i samo jedno rešenje integralne jednačine

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(t,x(t))\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

Neka je broj h takav da je

$$h < \frac{1}{K} \text{ i } h \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}. \tag{3.10}$$

Uočimo prostor C_Δ neprekidnih funkcija na segmentu Δ i njegov podskup A za koji je

$$\max_t |x(t) - x(t_0)| \leq b.$$

S obzirom na metriku u C_Δ, skup A je zatvoren, jer se sastoji iz tačaka zatvorene kugle $K[x_0, b]$.

Neka je preslikavanje $y = f(x),\ x \in A \subset C_\Delta$, definisano sa

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x(t))\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Treba da dokažemo da je preslikavanje $f : A \to A$ kontrakcija.

Pre svega, ako je $x \in A$ i $t \in \Delta$, tada tačka $(t, x(t)) \in P$, tj. desna strana u (3.11) ima smisla i očigledno je $y \in C_\Delta$. Da bismo dokazali da $y \in A$, primetimo da prema 1) i na osnovu druge jednačine u (3.10) imamo

$$|y(t) - x_0| = |\int_{t_0}^{t} g(t, x(t))dt| \leq M|t - t_0| \leq M \cdot h \leq M\frac{b}{M} = b.$$

Neka $x_1, x_2 \in A$. Tada za $t \in \Delta$, na osnovu 2), dobijamo

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \Big|\int_{t_0}^{t} [g(t, x_1(t)) - g(t, x_2(t))]\mathrm{d}t\Big| \leq$$

$$\leq K \cdot \int_{t_0}^{t} |x_1(t) - x_2(t)||\mathrm{d}t| \leq K \cdot h \cdot \max|x_1(t) - x_2(t)|.$$

Prema prvoj nejednačini u (3.10) imamo da je

$$K \cdot h = q < 1 \Rightarrow d(y_1, y_2) \leq q \cdot d(x_1, x_2),$$

tj. f je kontrakcija.

Kako je prostor C_Δ kompletan, a A zatvoren, to su svi uslovi za primenu Banahovog stava zadovoljeni, tj. preslikavanje (3.9) ima jedinstvenu nepokretnu tačku, a to je rešenje integralne jednačine (3.11), odnosno postavljenog diferencijalnog zadatka.

3.2.4 Integralne jednačine

Neka je data nehomogena Fredholmova integralna jednačina drugog reda

$$x(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t + g(s), \tag{3.12}$$

gde je jezgro $K(s,t)$ neprekidno u kvadratu

$$P = [a,b] \times [a,b].$$

Neka je funkcija $g(s)$ neprekidna u $[a,b]$ i λ realan parametar. Nepoznatu funkciju $x(t)$, tj. neprekidno rešenje ove integralne jednačine možemo tražiti kao nepokretnu tačku preslikavanja

$$y = f(x), \quad x = x(t) \in C[a,b],$$

određenog sa

$$y(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t + g(s).$$

Jasno, $f : C[a,b] \to C[a,b]$, a kako je $C[a,b]$ kompletan prostor, ostaje još da odredimo pod kojim uslovima je f kontrakcija. Ako je

$$\max_{(s,t)\in P} |K(s,t)| = M,$$

tada iz $x_1, x_2 \in C[a,b]$ sledi

$$|y_1(s) - y_2(s)| \leq |\lambda| \int_a^b |K(s,t)||x_1(t) - x_2(t)|\mathrm{d}t \leq |\lambda| M \max_{a\leq t\leq b} |x_1(t) - x_2(t)|(b-a),$$

što, s obzirom na metriku u $C[a,b]$, daje

$$d(y_1, y_2) \leq M|\lambda|(b-a)d(x_1, x_2).$$

Prema tome, ako je

$$|\lambda| < \frac{1}{M}(b-a),$$

tada je f je kontrakcija, pa na osnovu Banahovog stava, niz sukcesivnih aproksimacija konvergira jedinom neprekidnom rešenju nehomogene Fredholmove jednačine. Primetimo da je ovim stavom obezbeđeno rešenje Fredholmove jednačine samo za male vrednosti parametra $|\lambda|$.

3.3 F-kontrakcija i neke njene generalizacije

Wardowski[22][94] je 2012. godine definisao novu klasu funkcija na sledeći način:

Definicija 3.3. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih funkcija $F:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ takvih da važi:

(F1) F je strogo rastuća, tj. za svako $x,y\in(0,+\infty)$, iz $x<y$ sledi $F(x)<F(y)$;

(F2) za svaki niz $\{\alpha_n\}_{n=1}^{+\infty}$ pozitivnih bojeva, važi

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{n\to+\infty}F(\alpha_n)=-\infty;$$

(F3) postoji $k\in(0,1)$ tako da je $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\alpha^k F(\alpha)=0$.

Definicija 3.4. [94] Neka je (X,d) metrički prostor. Preslikavanje $T:X\to X$ se naziva *F-kontrakcija* na (X,d) ako postoji $F\in\mathcal{F}$ i $\tau>0$ tako da za svako $x,y\in X$ važi

$$d(Tx,Ty)>0 \;\Rightarrow\; \tau+F(d(Tx,Ty))\le F(d(x,y)).$$

Novu generalizaciju Banahovog principa kontrakcije dao je Wardowski na sledeći način:

Teorema 3.6. [94] *Neka je (X,d) kompletan metrički prostor i neka je $T:X\to X$ F-kontrakcija. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x^*\in X$ i za svako $x\in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.*

[22] Dariusz Wardowski-poljski matematičar

Piri i Kumam su u [79] modifikovali definiciju F kontrakcije na sledeći način:

Definicija 3.5. [79] Neka je $\mathcal{F}^*$ familija svih funkcija $F:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ takvih da važi:

$(F1)$ F je strogo rastuća, tj. za svako $x,y\in(0,+\infty)$ iz $x<y$ sledi $F(x)<F(y)$;

$(F2^*)$ $\inf F=-\infty$;

$(F3^*)$ F je neprekidna funkcija.

U [89] sledećom lemom je dokazano da su uslovi $(F2)$ i $(F2^*)$ ekvivalentni.

Lema 3.1. Ako je $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ rastuća funkcija i $\{t_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tada:

(a) Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n)=-\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=0$;

(b) Ako je $\inf(F)=-\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}=0$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_n)=-\infty$.

Klase funkcija $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^*$ nisu iste, jer $(F3)$ i $(F3^*)$ nisu u direktnoj vezi. Na isti način kao u slučaju F-kontrakcije, moguće je definisati F^*-kontrakciju, pri čemu $F\in\mathcal{F}^*$.

Definicija 3.6. [94] Neka je (X,d) metrički prostor. Preslikavanje $T:X\to X$ se naziva *F^*-kontrakcija* na (X,d) ako postoji $F\in\mathcal{F}^*$ i $\tau>0$ tako da za svako $x,y\in X$ važi

$$d(Tx,Ty)>0\;\Rightarrow\;\tau+F(d(Tx,Ty))\le F(d(x,y)).$$

Isto kao u slučaju F-kontrakcije i F^*-kontrakcija takođe ima jedinstvenu nepokretnu tačku na kompletnom metričkom prostoru, ali su tehnike dokazivanja drugačije nego u slučaju F-kontrakcije.

Teorema 3.7. [79] *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $T : X \to X$ F^*-kontrakcija. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x^* \in X$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.*

Wardowski i Dung uveli su 2014. godine pojam F-slabe kontrakcije i dokazali srodnu teoremu o nepokretnoj tački na sledeći način:

Definicija 3.7. [95] Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $T : X \to X$ se naziva *F-slaba kontrakcija* na (X, d) ako postoji $F \in \mathcal{F}$ i $\tau > 0$ tako da za svako $x, y \in X$ važi

$$d(Tx, Ty) > 0 \ \Rightarrow \ \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)),$$

gde je

$$M(x, y) = \left\{ d(x, y),\ d(x, Tx),\ d(y, Ty),\ \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

Teorema 3.8. [95] Neka je (X, d) *kompletan metrički prostor i* neka je *$T : X \to X$ F-slaba kontrakcija. Ako je T ili F neprekidno, tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x^* \in X$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.*

Definicija 3.8. [30] Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $T : X \to X$ se naziva *generalizovana F-kontrakcija* na (X, d) ako postoji $F \in \mathcal{F}$ i $\tau > 0$ tako da za svako $x, y \in X$ važi

$$d(Tx, Ty) > 0 \ \Rightarrow \ \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(N(x, y)),$$

gde je

$$N(x,y) = \left\{ d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2},\right.$$

$$\left. \frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2},\ d(T^2x,Tx),\ d(T^2x,y),\ d(T^2x,Ty) \right\}.$$

Teorema 3.9. [30] Neka je (X,d) *kompletan metrički prostor i* $T : X \to X$ *generalizovana F-kontrakcija. Ako je T ili F neprekidno, tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku* $x^* \in X$ *i za svako* $x \in X$ *niz* $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ *konvergira ka* x^*.

Piri i Kumam, [78], opisali su 2014, godine veliku klasu funkcija zamenjujući uslov (F3) u definiciji F-kontrakcije uslovom

(F3') F je neprekidna na $(0,+\infty)$.

Oni označavaju sa $\mathcal{F}$ familiju svih funkcija $F : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ koje zadovoljavaju uslove **(F1)**, **(F2)** i **(F3')**, a Ψ skup svih funkcija $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tako da je ψ neprekidna i

$$\psi(t) = 0 \text{ ako i samo ako je } t = 0.$$

Pod ovim novim postavkama, Piri i Kumam su predstavili i dokazali neke Wardowski i Suzuki rezultate za nepokretnu tačku u b-metričkim prostorima.

Definicija 3.9. [78] Neka je (X,d) b-metrički prostor. Preslikavanje $T : X \to X$ se naziva generalizovana *F-Suzuki-kontrakcija* ako postoji $F : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ koja zadovoljava **(F1)** i **(F3')** tako da za svako $x,y \in X$, $x \neq y$ važi

$$\frac{1}{2s} d(x, Tx) < d(x, y) \;\Rightarrow\; F\left(s^5 d(Tx, Ty)\right) \leq F\left(M_T(x, y)\right) - \psi\left(M_T(x, y)\right), \tag{3.13}$$

gde je $\psi \in \Psi$ i

$$\begin{aligned} M_T(x, y) = \max\Bigg\{ & d(x, y),\ d\left(T^2 x, y\right),\ \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2s}, \\ & \frac{d(T^2 x, x) + d(T^2 x, Ty)}{2s},\ d\left(T^2 x, Ty\right) + d\left(T^2 x, Tx\right), \\ & d\left(T^2 x, Ty\right) + d(Tx, x),\ d(Tx, y) + d(y, Ty) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.10. [78] Neka je (X, d) *kompletan b-metrički prostor i* $T : X \to X$ *generalizovana F-Suzuki-kontrakcija. Tada* T *ima jedinstvenu nepokretnu tačku* $x^* \in X$ *i za svako* $x \in X$ *niz* $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ *konvergira ka* x^*.

3.4 Generalizovano Lipšicovo preslikavanje

U ovom potpoglavlju uvodimo koncept generalizovanog Lipšicovog preslikavanja na M-konusnom metričkom prostoru nad Banahovom algebrom.

Definicija 3.10. Neka je (X, m) M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom. Preslikavanje $T : X \to X$ se naziva *generalizovano Lipšicovo preslikavanje* ako postoji vektor $k \in P$, gde je $\rho(k) < 1$, tako da za sve $\mu, \nu \in X$ važi

$$m(T\mu, T\nu) \preceq k\, m(\mu, \nu).$$

Primer 3.4. Neka je A Banahova algebra i P konus iz Primera 2.5 i neka je

$X = \mathbb{R}^+$. Definišimo preslikavanje $m : X \times X \to A$ sa

$$m(\mu,\nu)(t) = \left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t,$$

za sve $\mu, \nu \in X$. Tada (X, m) predstavlja M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A. Definišimo $T : X \to X$ sa

$$T(\mu) = \frac{\mu}{\mu+1},$$

gde je $\mu \in [3, +\infty)$. Za sve $\mu, \nu \in X$, kada je $\mu \neq \nu$ imamo

$$m(T\mu, T\nu)(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{\nu}{\nu+1}\right)e^t \preceq \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{4} + \frac{\nu}{4}\right)e^t =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t = km(\mu,\nu)(t).$$

Otuda, T je generalizovano Lipšicovo preslikavanje na X, gde je $k = \frac{1}{4}$.

Sada ćemo navesti neke činjenice iz teorije c-nizova.

Definicija 3.11. [56]. Neka je P čvrst konus u Banahovom prostoru E. Niz $\{u_n\} \subset P$ se naziva *c-niz* ako za svako $c \gg \theta$ postoji prirodan broj N tako da je $u_n \ll c$ za svako $n > N$.

Lema 3.2. ([96]). Neka je P čvrst konus u Banahovoj algebri A. Pretpostavimo da je $k \in P$ proizvoljan vektor i $\{u_n\}$ je c-niz u P. Tada je $\{ku_n\}$ c-niz.

Lema 3.3. ([88]) Neka je A Banahova algebra sa jedinicom e i neka je $k \in A$. Tada $\lim\limits_{n\to+\infty} \| k^n \|^{\frac{1}{n}}$ postoji i za spektralni poluprečnik $\rho(k)$ važi

$$\rho(k) = \lim_{n\to+\infty} \| k^n \|^{\frac{1}{n}} = \inf \| k^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

Ako je $\rho(k) < |\lambda|$, tada je $\lambda e - k$ invertibilan u A. Štaviše,

$$(\lambda e - k)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{k^i}{\lambda^{i+1}},$$

gde je λ kompleksna konstanta.

Lema 3.4. ([88]) Neka je A Banahova algebra sa jediniciom e i neka su $a, b \in A$. Ako a komutira sa b, tada važi

$$\rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b), \ \ \rho(ab) \leq \rho(a)\,\rho(b).$$

Lema 3.5. ([45]) Neka je A Banahova algebra sa jedinicom e i P čvrst konus u A. Neka za $a, k, l \in P$ važi $l \preceq k$ i $a \preceq la$. Ako je $\rho(k) < 1$, tada je $a = \theta$.

Lema 3.6. ([45]) Ako je E realan Banahov prostor sa čvrstim konusom P i $\{u_n\} \subset P$ niz, tako da $\| \, u_n \, \| \to 0$ $(n \to +\infty)$. Tada je $\{u_n\}$ c-niz.

Lema 3.7. ([45]) Ako je E realan Banahov prostor sa čvrstim konusom P tada važi:

(1) Ako $a, b, c \in E$ i $a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$, tada $a \ll c$;

(2) Ako je $a \in P$ i $a \ll c$ za svako $c \gg \theta$, tada je $a = \theta$.

Lema 3.8. ([45]) Neka je A Banahova algebra sa jedinicom e i neka je $k \in A$. Ako je λ kompleksna konstanta i $\rho(k) < |\lambda|$, tada je

$$\rho\Big(\big(\lambda e - k\big)^{-1}\Big) \leq \frac{1}{|\lambda| - \rho(k)}.$$

Glava 4

Rezultati za F-Suzuki kontrakciju u b-metričkim prostorima

U ovom poglavlju dajemo mnogo jednostavnije i kraće dokaze poznatog, značajnog rezultata iz [78] koji se odnosi na generalizovanu F-Suzuki kontrakciju u b-kompletnim b-metričkim prostorima. Koristeći naš novi pristup pri dokazivanju da je Pikarov niz b-Košijev, naši rezultati dati u radu [38] generalizuju, poboljšavaju i dopunjuju nekoliko poznatih rezultata u postojećoj literaturi. Štaviše, predstavljeni su neki novi kontraktivni uslovi da bi se ilustrovala primena dobijenih teorijskih rezultata.

U našim rezultatima, funkcija

$$F : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

zadovoljava samo uslov (F1) iz Definicije 3.3.

Definicija 4.1. Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $T : X \to X$

se naziva *generalizovana F1-kontrakcija* na (X, d) ako postoji funkcija $F : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ koja zadovoljava uslov (F1) iz Definicije 3.3 i $\tau > 0$ tako da za svako $x, y \in X$ važi

$$d\left(Tx, Ty\right) > 0 \text{ sledi } \tau + F\left(d\left(Tx, Ty\right)\right) \leq F\left(N\left(x, y\right)\right), \tag{4.1}$$

gde je

$$N(x, y) = \left\{d(x, y),\ d(x, Tx),\ d(y, Ty),\ \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2},\right.$$

$$\left.\frac{d(T^2x, x) + d(T^2x, Ty)}{2},\ d(T^2x, Tx),\ d(T^2x, y),\ d(T^2x, Ty)\right\}.$$

Naš prvi rezultat generalizuje i poboljšava Teoremu 3.9 Sada navodimo jedan od naših glavnih rezultata.

Teorema 4.1. ([38]) Neka je (X, d) *kompletan metrički prostor i* $T : X \to X$ *generalizovana F1-kontrakcija na* (X, d). *Ako je* T *ili* F *neprekidno, tada* T *ima jedinstvenu nepokretnu tačku* $x^* \in X$ *i za svako* $x \in X$ *niz* $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ *konvergira ka* x^*.

Dokaz. Prvo ćemo proveriti da li uslov (4.1) obezbeđuje jedinstvenost nepokretne tačke pod pretpostavkom da ona postoji. Zaista, neka su $\overline{x}$ i $\overline{y}$ dve različite nepokretne tačke preslikavanja T. To znači da je naredna relacija tačna (jer je $d(T\overline{x}, T\overline{y}) > 0$)

$$\tau + F\left(d\left(T\overline{x}, T\overline{y}\right)\right) \leq F\left(N\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\right),$$

pri čemu je

$$N(\overline{x},\overline{y}) = \max\left\{ d(\overline{x},\overline{y}),\ d(\overline{x},T\overline{x}),\ d(\overline{y},T\overline{y}),\ \frac{d(\overline{x},T\overline{y})+d(\overline{y},T\overline{x})}{2},\right.$$

$$\left.\frac{d(T^2\overline{x},\overline{x})+d(T^2\overline{x},T\overline{y})}{2},\ d\left(T^2\overline{x},T\overline{x}\right),\ d\left(T^2\overline{x},\overline{y}\right),\ d\left(T^2\overline{x},T\overline{y}\right)\right\}.$$

Dakle, imamo da je

$$N(\overline{x},\overline{y}) = \max\left\{ d(\overline{x},\overline{y}),\ 0,\ 0,\ \frac{d(\overline{x},\overline{y})+d(\overline{y},\overline{x})}{2},\ \frac{0+d(\overline{x},\overline{y})}{2},\right.$$

$$\left. 0,\ d(\overline{x},\overline{y}),\ d(\overline{x},\overline{y})\right\} = d(\overline{x},\overline{y})$$

Dalje, dobijamo da je

$$\tau + F(d(\overline{x},\overline{y})) \leq F(d(\overline{x},\overline{y}))\ \ (\tau > 0),$$

što je kontradikcija. Otuda, dokaz jedinstvenosti nepokretne tačke preslikavanja T, ukoliko ona postoji, jeste završen.

Da bismo pokazali da T ima nepokretnu tačku, pretpostavimo da je x_0 proizvoljna tačka u X. Sada, definišimo Pikarov niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, na sledeći način:

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

Ako je $x_p = x_{p+1}$ za neko $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, tada je x_p jedinstvena nepokretna tačka i dokaz je završen. Prema tome, pretpostavimo da je $x_n \neq x_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Prema uslovu (4.1), sledi da je

$$\tau + F(d(Tx_{n-1},Tx_n)) \leq F(N(x_{n-1},x_n)),$$

jer je

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0,$$

gde je

$$N(x_{n-1}, x_n) = \max\Big\{d(x_{n-1}, x_n),\ d(x_{n-1}, x_n),\ d(x_n, x_{n+1}),$$

$$\frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)}{2}, \frac{d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2},$$

$$d(x_{n+1,}x_n),\ d(x_{n+1}, x_n),\ d(x_{n+1}, x_{n+1})\Big\},$$

odnosno

$$N\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq \max\left\{d\left(x_{n-1}, x_n\right), d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right\},$$

jer je

$$d(x_{n+1}, x_{n-1}) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}), \quad ; d(x_n, x_n) = 0.$$

Dakle, iz (4.1) dobijamo da je

$$\tau + F\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) \leq F\left(\max\left\{d\left(x_{n-1}, x_n\right), d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right\}\right). \tag{4.2}$$

Ako je

$$\max\left\{d\left(x_{n-1}, x_n\right), d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right\} = d\left(x_n, x_{n+1}\right),$$

tada iz (4.2) sledi kontradikcija. Stoga,

$$\tau + F\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) \leq F\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right), \tag{4.3}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Dalje, prema (4.3) i uslovu (F1) dobijamo da je

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) < d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. To dalje znači da postoji

$$\rho^* = \lim_{n \to +\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right).$$

U ovom, slučaju iz (4.3) sledi da je

$$\tau + F\left(\rho^* + 0\right) \leq F\left(\rho^* + 0\right),$$

što je u suprotnosti sa $\tau > 0$.

Sada dokažimo da je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ Košijev niz pretpostavljajući suprotno. Ako u (4.1) stavimo da je $x = x_{n_k},\ y = x_{m_k}$, dobijamo

$$\tau + F\left(d\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)\right) \leq F\left(N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right), \tag{4.4}$$

gde je

$$\begin{gathered} N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right) = \max\Bigg\{d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right),\ d\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right),\ d\left(x_{m_k}, x_{m_k+1}\right), \\ \frac{d\left(x_{n_k}, x_{m_k+1}\right) + d\left(x_{m_k}, x_{n_k+1}\right)}{2}, \frac{d\left(x_{n_k+2}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k+2}, x_{m_k+1}\right)}{2}, \\ d\left(x_{n_k+2}, x_{n_k+1}\right),\ d\left(x_{n_k+2}, x_{m_k}\right),\ d\left(x_{n_k+2}, x_{m_k+1}\right)\Bigg\}. \end{gathered}$$

Pošto prema Posledici 2.1 imamo da $d\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right), d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)$ i $N\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)$

teže ka ε^+ kada $k \to +\infty$, dobijamo iz (4.4) da je

$$\tau + F\left(\varepsilon^+ + 0\right) \leq F\left(\varepsilon^+ + 0\right),$$

što predstavlja kontradikciju. Otuda je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ Košijev.

Budući da je (X,d) kompletan metrički prostor, sledi da niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ konvergira ka nekom $x^* \in X$.

Ako je preslikavanje T neprekidno, tada Tx_n teži ka Tx^*, tj. x^* je nepokretna tačka preslikavanja T.

U slučaju da je F neprekidno imamo sledeću situaciju. Prvo, možemo pretpostaviti da $x^*, Tx^* \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Ovo je posledica činjenice da je

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) < d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

za svako $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, što implicira da je $x_n \neq x_m$ kad god je $n \neq m$.

Stavljajući u (4.1) $x = x_n, y = x^*$ i pretpostavljajući da je $d\left(x^*, Tx^*\right) > 0$, odmah dobijamo

$$\tau + F\left(d\left(x_{n+1}, Tx^*\right)\right) \leq F\left(N\left(x_n, x^*\right)\right), \tag{4.5}$$

gde je

$$N(x_n, x^*) = \max\Bigg\{d(x_n, x^*),\ d(x_n, x_{n+1}),\ d(x^*, Tx^*),$$
$$\frac{d(x_n, Tx^*) + d(x^*, x_{n+1})}{2},\ \frac{d(x_{n+2}, x_n) + d(x_{n+2}, Tx^*)}{2},$$
$$d(x_{n+2}, x_{n+1}),\ d(x_{n+2}, x^*),\ d(x_{n+2}, Tx^*)\Bigg\}.$$

Kada $n \to +\infty$, dobijamo da $N(x_n, x^*)$ teži ka $d(x^*, Tx^*)$.

Budući da je F neprekidna, tada iz (4.5) sledi da je

$$\tau + F(d(x^*, Tx^*)) \leq F(d(x^*, Tx^*)),$$

što je u suprotnosti sa $\tau > 0$. Otuda, pretpostavka da je $d(x^*, Tx^*) > 0$ bila je pogrešna. Prema tome tačka x^* je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T, čime je dokaz završen. $\square$

Neposredna posledica Teoreme 4.1 su sledeći novi kontraktivni uslovi koji dopunjuju uslove iz radova [24] i [87].

Posledica 4.1. ([38]) *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $T : X \to X$ generalizovana $F1$-kontrakcija, takva da postoji $\tau > 0$ i za svako $x, y \in X$, pri čemu je $d(Tx, Ty) > 0$, važe sledeće nejednakosti:*

$$\tau + d(Tx, Ty) \leq N(x, y),$$

$$\tau + \exp(d(Tx, Ty)) \leq \exp(N(x, y)),$$

$$\tau - \frac{1}{d(Tx, Ty)} \leq -\frac{1}{N(x, y)},$$

$$\tau - \frac{1}{d(Tx, Ty)} + d(Tx, Ty) \leq -\frac{1}{N(x, y)} + N(x, y),$$

$$\tau + \frac{1}{1 - \exp(d(Tx, Ty))} \leq \frac{1}{1 - \exp(N(x, y))},$$

$$\tau + \frac{1}{\exp(-d(Tx, Ty)) - \exp(d(Tx, Ty))} \leq \frac{1}{\exp(-N(x, y)) - \exp(N(x, y))},$$

gde je

$$N(x,y)=\Big\{d(x,y),\ d(x,Tx),\ d(y,Ty),\ \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2},$$

$$\frac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2},\ d(T^2x,Tx),\ d(T^2x,y),\ d(T^2x,Ty)\Big\}.$$

Tada u svakom od navedenih slučejava T ima jedinstvenu nepokretnu tačku x^* i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.

Dokaz. Ako uzmemo u obzir da je svaka od sledećih funkcija

$$r \mapsto r,\ r \mapsto e^r,\ r \mapsto -\frac{1}{r},\ r \mapsto -\frac{1}{r}+r,\ r \mapsto \frac{1}{1-e^r},\ r \mapsto \frac{1}{e^{-r}-e^r},$$

strogo rastuća na $(0,+\infty)$ onda sledi dokaz na osnovu Teoreme 4.1. $\square$

Drugi novi rezultat, koji predstavljamo, je generalizacija Teoreme 3.10 ([78], Teorema 2.2 za koji dajemo tačniji i kraći dokaz.

Teorema 4.2. ([38]) Neka je (X,d,s), $s>1$ *kompletan b-metrički prostor i* $T : X \to X$ *generalizovana F-Suzuki-kontrakcija. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x^* \in X$ i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.*

Dokaz. Iz uslova (3.13) imamo:

$$x \neq y \text{ i } \frac{1}{2s} d(x,Tx) < d(x,y), \tag{4.6}$$

odakle sledi

$$F\left(s^5 d(Tx,Ty)\right) \leq F\left(M_T(x,y)\right) - \psi\left(M_T(x,y)\right).$$

Dalje imamo

$$F\left(s^5 d\left(Tx, Ty\right)\right) \leq F\left(M_T\left(x, y\right)\right),$$

tj.

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{s^5} M_T(x, y) \quad s > 1. \tag{4.7}$$

gde je $m \in (0, 5]$ i

$$M_T\left(x, y\right) = \max\left\{d\left(x, y\right),\ d\left(T^2 x, y\right),\ \frac{d\left(x, Ty\right) + d\left(y, Tx\right)}{2s},\right.$$

$$\frac{d\left(T^2 x, x\right) + d\left(T^2 x, Ty\right)}{2s},\ d\left(T^2 x, Ty\right) + d\left(T^2 x, Tx\right),$$

$$\left. d\left(T^2 x, Ty\right) + d\left(Tx, x\right),\ d\left(Tx, y\right) + d\left(y, Ty\right)\right\}.$$

Dokaz dalje sledi u nekoliko koraka.

Korak 1. Jedinstvenost nepokretne tačke pod pretpostavkom da ona postoji.

Zaista, ako su x^*, y^* dve različite nepokretne tačke preslikavanja T, tada je $x^* \neq y^*$ i važi da je

$$\frac{1}{2s} d\left(x^*, Tx^*\right) = 0 < d\left(x^*, y^*\right).$$

Prema tome, iz (4.7) sledi

$$d\left(x^*, y^*\right) = d\left(Tx^*, Ty^*\right) \leq \frac{1}{s^m} M_T\left(x^*, y^*\right), \tag{4.8}$$

gde je

$$M_T\left(x^*, y^*\right) = \max\left\{d\left(x^*, y^*\right),\ d\left(T^2 x^*, y^*\right),\ \frac{d\left(x^*, Ty^*\right) + d\left(y^*, Tx^*\right)}{2s},\right.$$

$$\frac{d\left(T^2x^*,x^*\right)+d\left(T^2x^*,Ty^*\right)}{2s},\ d\left(T^2x^*,Ty^*\right)+d\left(T^2x^*,Tx^*\right),$$

$$d\left(T^2x^*,Ty^*\right)+d\left(Tx^*,x^*\right),\ d\left(Tx^*,y^*\right)+d\left(y^*,Ty^*\right)\Big\}.$$

Sada je

$$M_T\left(x^*,y^*\right)=\max\Big\{d\left(x^*,y^*\right),\ d\left(x^*,y^*\right),\ \frac{d\left(x^*,y^*\right)}{s},\ \frac{0+d\left(x^*,y^*\right)}{2s},$$

$$d\left(x^*,y^*\right)+0,\ d\left(x^*,y^*\right)+0,\ d\left(x^*,y^*\right)+0\Big\}=$$

$$=\left\{d\left(x^*,y^*\right),\ \frac{d\left(x^*,y^*\right)}{s},\ \frac{d\left(x^*,y^*\right)}{2s}\right\}=d\left(x^*,y^*\right).$$

Dakle, uslov (4.8) postaje

$$d\left(x^*,y^*\right)\leq\frac{1}{s^m}d\left(x^*,y^*\right),$$

što predstavlja kontradikciju. Prema tome, ako T ima nepokretnu tačku, ona je jedinstvena.

Korak 2. Niz $x_n=T^nx_0$, $x_0\in X$, jeste b-Košijev.

Ako je $x_p=x_{p+1}$, za neko $p\in\mathbb{N}$, dokaz je završen. U tom slučaju x_p je jedinstvena nepokretna tačka i jasno, u ovom slučaju, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ je b-Košijev, jer je svaki konvergentan niz zapravo b-Košijev. Prema tome, pretpostavimo da je $x_n\neq x_{n+1}$ za svako $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Dakle, imamo da je $x_n\neq x_{n+1}$ i

$$\frac{1}{2s}d\left(x_n,Tx_n\right)<d\left(x_n,x_{n+1}\right)\ \text{jer je}x=x_n,y=x_{n+1},$$

pa će uslov (4.7) postati

$$d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) = d\left(Tx_n, Tx_{n+1}\right) \leq \frac{1}{s^m} M_T\left(x_n, x_{n+1}\right), \tag{4.9}$$

gde je

$$M_T\left(x_n, x_{n+1}\right) = \max\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right), d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right), \frac{d\left(x_n, x_{n+2}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+1}\right)}{2s},\right.$$

$$\frac{d\left(x_{n+2}, x_n\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+2}\right)}{2s}, d\left(x_{n+2}, x_{n+2}\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right),$$

$$\left. d\left(x_{n+2}, x_{n+2}\right) + d\left(x_{n+1}, x_n\right),\ d\left(x_{n+1}, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right\},$$

Dalje je

$$M_T\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \max\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right), d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right), \frac{d\left(x_n, x_{n+2}\right)}{2s}, d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right), d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right)\right\}.$$

Sada, iz (4.9) imamo

$$d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \leq \frac{1}{s^m} \max\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right), d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right)\right\}. \tag{4.10}$$

Ako je

$$\max\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right), d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right)\right\} = d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right),$$

dobijamo kontradikciju $1 \leq \frac{1}{s^m}$. Zbog toga, (4.10) postaje

$$d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \leq \mu d\left(x_n, x_{n+1}\right),\ \mu = \frac{1}{s^m} \in (0,1),$$

pa na osnovu Leme 2.5 imamo da je niz $x_n = T^n x_0$ b-Košijev niz.

Korak 3. Postojanje nepokretne tačke.

Budući da je b-metrički prostor (X, d, s) $s > 1$ b-kompletan, to postoji jedinstvena tačka $x^* \in X$ takva da niz $x_n = T^n x_0$ konvergira ka x^*, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} d\left(x_n, x^*\right) = 0.$$

Važe sledeće dve relacije(videti [78]) sledeće dve relacije:

$$\frac{1}{2s} d\left(x_n, Tx_n\right) < d\left(x_n, x^*\right) \tag{4.11}$$

ili

$$\frac{1}{2s} d\left(Tx_n, T^2x_n\right) < d\left(Tx_n, x^*\right), \tag{4.12}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Takođe pošto, je,

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) < d\left(x_n, x_{n-1}\right), \tag{4.13}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$ možemo pretpostaviti da $x^*, Tx^* \notin \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$.

Dokažimo da relacije date sa (4.11) i (4.12) zaista važe. Pretpostavimo suprotno, da postoji neko $m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\frac{1}{2s} d\left(x_m, Tx_m\right) \geq d\left(x_m, x^*\right) \tag{4.14}$$

i

$$\frac{1}{2s} d\left(Tx_m, T^2x_m\right) \geq d\left(Tx_m, x^*\right). \tag{4.15}$$

Stoga imamo

$$2sd(x_m, x^*) \leq d(x_m, Tx_m) \leq s[d(x_m, x^*) + d(x^*, Tx_m)],$$

što dalje implicira da je

$$d(x_m, x^*) \leq d(x^*, Tx_m). \tag{4.16}$$

Sada iz (4.13) i (4.16), imamo

$$d(Tx_m, T^2x_m) < d(x_m, Tx_m) \leq sd(x_m, x^*) + sd(x^*, Tx_m) \leq 2sd(x^*, Tx_m). \tag{4.17}$$

Iz (4.14), (4.15) i (4.17) sledi da je

$$d(Tx_m, T^2x_m) < d(Tx_m, T^2x_m),$$

što predstavlja kontradikciju.

Prema tome, ako je

$$\frac{1}{2s} d\left(x_n, Tx_n\right) < d\left(x_n, x^*\right),$$

uslov dat sa (4.7) postaje

$$d\left(Tx_n, Tx^*\right) \leq \frac{1}{s^m} M_T\left(x_n, x^*\right), \tag{4.18}$$

gde je

$$M_T\left(x_n, x^*\right) = \max\left\{d\left(x_n, x^*\right), d\left(x_{n+2}, x^*\right), \frac{d\left(x_{n+1}, x^*\right) + d\left(x_n, Tx^*\right)}{2s},\right.$$

$$\frac{d\left(x_{n+2}, x_n\right) + d\left(x_{n+2}, Tx^*\right)}{2s}, d\left(x_{n+2}, Tx^*\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right),$$

$$\left. d\left(x_{n+2}, Tx^*\right) + d\left(x_{n+1}, x_n\right),\ d\left(x_{n+1}, x^*\right) + d\left(x^*, Tx^*\right) \right\}.$$

Kako je $d(x_k, Tx^*) \leq s \cdot d(x_k, x^*) + s \cdot d(x^*, Tx^*)$, za $k = n$, $n+2$, respektivno, to dobijamo

$$M_T(x_n, x^*) \leq \max\Bigg\{ d(x_n, x^*), d(x_{n+2}, x^*),$$

$$\frac{d(x_{n+1}, x^*) + s \cdot d(x_n, x^*) + s \cdot d(x^*, Tx^*)}{2s},$$

$$\frac{d(x_{n+2}, x_n) + s \cdot d(x_{n+2}, x^*) + s \cdot d(x^*, Tx^*)}{2s},$$

$$s \cdot d(x_{n+2}, x^*) + s \cdot d(x^*, Tx^*) + d(x_{n+2}, x_{n+1}),$$

$$s \cdot d(x_{n+2}, x^*) + s \cdot d(x^*, Tx^*) + d(x_{n+1}, x_n),\ d(x_{n+1}, x^*) + d(x^*, Tx^*) \Bigg\}$$

$$\to \max\left\{0, \frac{d(x^*, Tx^*)}{2}, s \cdot d(x^*, Tx^*), d(x^*, Tx^*)\right\} = s \cdot d(x^*, Tx^*), \tag{4.19}$$

kada $n \to +\infty$. Sa druge strane, ako je

$$\frac{1}{2s} d\left(Tx_n, T^2 x_n\right) < d(Tx_n, x^*),$$

tj.

$$\frac{1}{2s} d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) < d(x_{n+1}, x^*),$$

iz (4.7) sledi

$$d(Tx_{n+1}, Tx^*) \leq \frac{1}{s^m} M_T(x_{n+1}, x^*), \tag{4.20}$$

gde je

$$M_T(x_{n+1}, x^*) = \max\Bigg\{ d(x_{n+1}, x^*),\ d(x_{n+3}, x^*),\ \frac{d(x_{n+1}, Tx^*) + d(x^*, Tx^*)}{2s},$$

$$\frac{d(x_{n+3}, x_{n+1}) + d(x_{n+3}, Tx^*)}{2s},\ d(x_{n+3}, Tx^*) + d(x_{n+3}, x_{n+2}),$$

$$d\left(x_{n+3}, Tx^*\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right), \quad d\left(x_{n+2}, x^*\right) + d\left(x^*, Tx^*\right) \Big\}.$$

Ponovo, kako je

$$d\left(x_k, Tx^*\right) \leq s \cdot d\left(x_k, x^*\right) + s \cdot d\left(x^*, Tx^*\right),$$

za $k = n+1$, $n+3$, respektivno, dobijamo da je

$$M_T\left(x_{n+1}, x^*\right) \leq \max\Big\{ d\left(x_{n+1}, x^*\right), d\left(x_{n+3}, x^*\right), \frac{d\left(x_{n+1}, x^*\right) + d\left(x^*, Tx^*\right)}{2},$$

$$\frac{d\left(x_{n+3}, x_{n+1}\right) + s \cdot d\left(x_{n+3}, x^*\right) + s \cdot d\left(x^*, Tx^*\right)}{2s},$$

$$s \cdot d\left(x_{n+3}, x^*\right) + s \cdot d\left(x^*, Tx^*\right) + d\left(x_{n+3}, x_{n+2}\right),$$

$$s \cdot d\left(x_{n+3}, x^*\right) + s \cdot d\left(x^*, Tx^*\right) + d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right), \ d\left(x_{n+2}, x^*\right) + d\left(x^*, Tx^*\right) \Big\}$$

$$\to \max\left\{0, \frac{d\left(x^*, Tx^*\right)}{2}, sd\left(x^*, Tx^*\right), d\left(x^*, Tx^*\right)\right\} = s \cdot d\left(x^*, Tx^*\right), \quad (4.21)$$

kada $n \to +\infty$.

Za tačke x^*, Tx^* sledeće dve nejednakosti su očigledne:

$$\frac{1}{s} d\left(x^*, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_{n+1}\right) + \frac{1}{s^m} M_T\left(x_n, x^*\right) \quad (4.22)$$

ili

$$\frac{1}{s} d\left(x^*, Tx^*\right) \leq d\left(x^*, x_{n+2}\right) + \frac{1}{s^m} M_T\left(x_{n+1}, x^*\right). \quad (4.23)$$

Dokažimo, na primer, (4.22). Kako je

$$d(x^*, Tx^*) \leq s(d(x^*, Tx_n) + d(Tx_n, Tx^*)),$$

to sledi da je

$$\frac{1}{s}d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + \frac{1}{s^m}M_T(x_n,x^*)$$

Slično se dokazuje (4.23).

Ako $m \in (2,5]$, tada iz (4.18)–(4.23), imamo

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^{m-1}}\right) d\left(x^*,Tx^*\right) \leq 0,$$

kada $n \to +\infty$, pa sledi da je x^* jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T.

Objasnimo prethodnu nejednakost. Kako je

$$\frac{1}{s}d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + \frac{1}{s^m}M_T(x_n,x^*) \leq d(x^*,x_{n+1}) + \frac{1}{s^{m-1}}d(x^*,Tx^*),$$

to je

$$(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^{m-1}})d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{n+1}).$$

Sada, ako $n \to +\infty$, dobijamo da je

$$(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^{m-1}})d(x^*,Tx^*) \leq 0 \;\Rightarrow\; d(x^*,Tx^*) = 0 \Rightarrow Tx^* = x^*,\; m \in (2,5].$$

U slučaju kada je

$$\frac{1}{s}d\left(x^*,Tx^*\right) \leq d\left(x^*,x_{n+2}\right) + \frac{1}{s^m}M_T\left(x_{n+1},x^*\right),$$

koristićemo

$$d(x^*,x_{n+2}) < d(x^*,x_{n+1})$$

i

$$M_T(x_{n+1}, x^*) \leq s \cdot d(x^*, Tx^*),$$

a zatim nastavljamo kao u prethodno navedenom postupku. □

Napomena 4.1. Iz dokaza Teoreme 3.10 sledi da je ona tačna za svako $m > 2$. Takođe, očigledno da su obe funkcije F i ψ suvišne u dokazu Teoreme 4.2 Ovo pokazuje da naš pristup generalizuje Teoremu 3.10 ([78], Teorema 2.2) u nekoliko pravaca.

Sledeći rezultat je neposredna posledica Teoreme 4.2.

Posledica 4.2. Neka je (X, d, s), $s > 1$ b-kompletan b-metrički prostor i neka je $T : X \to X$ generalizovana F-Suzuki kontrakcija tako da za svako $x, y \in X$, pri čemu je $d(Tx, Ty) > 0$ i

$$\frac{1}{2s} d(x, Tx) < d(x, y),$$

važi:

$$s^m d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} M_T(x, y),$$

$$s^m d(Tx, Ty) \leq M_T(x, y),$$

$$\exp(s^m d(Tx, Ty)) \leq \exp(M_T(x, y)),$$

$$\exp(-s^m d(Tx, Ty)) - \exp(s^m d(Tx, Ty)) \leq \frac{1}{\exp(-M_T(x, y)) - \exp(M_T(x, y))},$$

gde je $M_T(x, y)$ dato u Definiciji 3.9 i $m > 2$. Tada u svakom od navedenih slučajeva preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku x^* i za svako $x \in X$ niz $\{T^n x\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergira ka x^*.

Dokaz. Svaka od narednih funkcija $F:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$

$$F(r)=r,\ \psi(r)=\frac{1}{2}r;\ F(r)=r,\ F(r)=\exp(r),\ F(r)=\exp(-r)-\exp(r),$$

jeste strogo rastuća $(0,+\infty)$, pa dokaz sledi na osnovu Teoreme 4.2. U poslednja tri slučaja funkcija ψ nije neophodna. □

Napomena 4.2. Uočeni propusti iz rada [78], a koji su ispravljeni i publikovani u [38] su sledeći :

1^o Dokaz da je

$$\lim_{n\to+\infty} M_T(x_n,x^*)=d(x^*,Tx^*) \tag{4.24}$$

nije tačan , zato što b-metrika d nije nužno neprekidna. Dakle, greška je u sledećem:

$$d(x^*,Tx^*)\le M_T(x_n,x^*)=\max\Big\{d(x_n,x^*),\ d(x_{n+2},x^*),\ \frac{d(x_{n+1},x^*)+d(x_n,Tx^*)}{2s},$$

$$\frac{d(x_{n+2},Tx^*)+d(x_{n+2},Tx^*)}{2s},\ d(x_{n+2},Tx^*)+d(x_{n+2},x_{n+1}),$$

$$d(x_{n+2},Tx^*)+d(x_{n+1},x_n),\ d(x_{n+1},x^*)+d(x^*,Tx^*)\Big\}\le$$

$$\le\max\Big\{d(x_n,x^*),\ d(x_{n+2},x^*),\ \frac{d(x_{n+1},x^*)+d(x_n,Tx^*)}{2s},$$

$$\frac{s[d(x_{n+2},x_{n+1})+d(x_{n+1},x_n)]+d(x_{n+2},Tx^*)}{2s},$$

$$d(x_{n+2},Tx^*)+d(x_{n+2},x_{n+1}),\ d(x_{n+2},T^*)+d(x_{n+1},x_n),\ d(x_{n+1},x^*)+d(x^*,Tx^*)\Big\},$$

odakle, puštajući da $n \to \infty$ i koristeći da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0,$$

dobija se (4.24).

Naime, mi smo dobili da je

$$\lim_{n\to+\infty} M_T\left(x_n, x^*\right) = sd\left(x^*, Tx^*\right),$$

ako je $s > 1$ i $m \in (2, +\infty)$.

2^o Takođe i naredni primer ne zadovoljava pretpostavke Teoreme 4.2. Zaista, kako je $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i b-metrika d je definisana na X sa:

$$d\left(x, y\right) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } x = y, \\ 2, \text{ ako je } \left(x, y\right) \in \left\{\left(1, -1\right), \left(-1, 1\right)\right\}, \\ 1, \text{ za preostale slučajeve,} \end{cases}$$

imamo da je $(X, d, 2)$ b-metrički prostor. Neka je preslikavanje $T : X \to X$ definisano sa

$$T\left(-2\right) = T\left(0\right) = T\left(2\right) = 0,\ T\left(-1\right) = 1, T\left(1\right) = -2.$$

Stavljajući u (3.13) $x = 0,\ y = 1$ dobijamo

$$\frac{1}{2\cdot 2} d\left(0, T(0)\right) < d\left(0, 1\right) \Rightarrow F\left(2^5 d\left(T(0), T(1)\right)\right) \leq F\left(M_T\left(0, 1\right)\right) - \psi\left(M_T\left(0, 1\right)\right). \tag{4.25}$$

Kako je

$$\frac{1}{2\cdot 2} d\left(0, T(0)\right) < d\left(0, 1\right),$$

tj. $0 < 1$, što je tačno, i budući da je

$$2^5 d\left(T(0), T(1)\right) = 32 d\left(0, -2\right) = 32$$

i $M_T\left(0, 1\right) = 2$, uslov (4.25) postaje

$$0 < 1 \Rightarrow F\left(32\right) \leq F\left(2\right) - \psi\left(2\right) < F\left(2\right).$$

Prema uslovu (F1) sledi da je $32 < 2$, što je kontradikcija.

Glava 5

Rezultati nepokretne tačke u M-konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom

U ovoj poglavlju istražujemo postojanje nepokretne tačke za generalizovana Lipšicova preslikavanja u M-konusnim metričkim prostorima nad Banahovom algebrom. Kao primenu, ispitujemo postojanje i jedinstvenost rešenja za Fredholmovu integralnu jednačinu. Naši rezultati dati u radu [33] generalizuju i poboljšavaju glavne rezultate date u radu [12].

Teorema 5.1. ([33]) Neka je (X, m) θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A i $T : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov

$$m(T\mu, T\nu) \preceq k[m(\mu, T\mu) + m(\nu, T\nu)], \tag{5.1}$$

za sve $\mu, \nu \in X$, pri čemu je $\rho(k) < 1$. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Dokaz. Neka je $\mu_0 \in X$ proizvoljna tačka i definišimo niz $\{\mu_n\}$ u X tako da je $\mu_n = T\mu_{n-1}$, za svako $n \in N$. Iz (5.1) i (m_4) iz Definicije 2.19 dobijamo

$$m(\mu_{n+1}, \mu_n) = m(T\mu_n, T\mu_{n-1}) \preceq k\Big[m(\mu_n, T\mu_n) + m(\mu_{n-1}, T\mu_{n-1})\Big] =$$

$$= k\Big[m(\mu_n, \mu_{n+1}) + m(\mu_{n-1}, \mu_n)\Big].$$

Stoga je

$$(e-k)m(\mu_{n+1}, \mu_n) \preceq km(\mu_{n-1}, \mu_n).$$

Budući da je $\rho(k) < 1$, na osnovu Leme 3.3 ($\rho(k) < |\lambda| = 1$) sledi da je $(e-k)$ invertibilan.

Dakle,

$$m(\mu_{n+1}, \mu_n) \preceq k(e-k)^{-1}m(\mu_{n-1}, \mu_n).$$

Stavljajući da je

$$h = k(e-k)^{-1},$$

dobijamo

$$m(\mu_{n+1}, \mu_n) \preceq h\, m(\mu_n, \mu_{n-1}).$$

Korišćenjem Leme 3.4 i Leme 3.8, imamo da je

$$\rho(h) = \rho\Big[k(e-k)^{-1}\Big] \leq \rho(k) \cdot \rho\big((e-k)^{-1}\big) \leq \frac{\rho(k)}{1-\rho(k)} < 1.$$

Prema tome, $e-h$ je invertibilan. Nastavljajući istim postupkom, dobićemo

$$m(\mu_n,\mu_{n+1}) \preceq h^n m(\mu_0,\mu_1).$$

Očigledno je da važe uslovi (i), (ii), (iii) iz Leme 2.18.

Štaviše, za svako $n,m\in N$, $n>m$, imamo da je

$$m(\mu_n,\mu_m)-m_{\mu_n\mu_m} \preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})-m_{\mu_n\mu_{n+1}}+m(\mu_{n+1},\mu_m)-m_{\mu_{n+1}\mu_m} \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_m) \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})-m_{\mu_{n+1}\mu_{n+2}}+m(\mu_{n+2},\mu_m)-m_{\mu_{n+2}\mu_m} \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})+m(\mu_{n+2},\mu_m) \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})+m(\mu_{n+2},\mu_{n+1})+\cdots+m(\mu_{m-1},\mu_m) \preceq$$

$$\preceq h^n m(\mu_0,\mu_1)+h^{n+1}m(\mu_0,\mu_1)+\cdots+h^{m-1}m(\mu_0,\mu_1)=$$

$$=h^n\Big[e+h+h^2+\cdots+h^{m-n-1}\Big]m(\mu_0,\mu_1)=(e-h)^{-1}h^n m(\mu_0,\mu_1),$$

jer je, kako smo pokazali, $r(h)<1$. Dalje, prema Propoziciji 2.1, sledi da je

$$(e-h)^{-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}h^i,\ \text{kada } m\to+\infty.$$

S obzirom na Napomenu 2.3, imamo da važi

$$\|h^n m(\mu_0,\mu_1)\| \leq \|h^n\|\,\|m(\mu_0,\mu_1)\| \to 0$$

kada $n\to+\infty$, a prema Lemi 3.6 imamo da je $\{h^n m(\mu_0,\mu_1)\}$ c-niz. Koristeći Lemu 3.2 i Lemu 3.7, sledi da je $\{\mu_n\}$ θ-Košijev niz u X. Kako je X θ-

kompletan, to postoji $\mu \in X$ tako da je

$$\lim_{n \to +\infty} m(\mu_n, \mu) = \lim_{n,m \to +\infty} m(\mu_n, \mu_m) = m(\mu, \mu) = \theta. \tag{5.2}$$

Takođe, $\mu_n \to \mu$ kada $n \to +\infty$, za neko $\mu \in X$. Dakle,

$$m(\mu_n, \mu) - m_{\mu_n \mu} \to \theta, \ \ n \to +\infty$$

i

$$m_{\mu_n \mu} = \min\big\{m(\mu_n, \mu_n), m(\mu, \mu)\big\} \to \theta, \ \ n \to +\infty \tag{5.3}$$

$$m_{\mu_n T\mu} = \min\big\{m(\mu_n, \mu_n), m(T\mu, T\mu)\big\} = \theta, \ \ n \to +\infty. \tag{5.4}$$

Sada ćemo pokazati da je $m(\mu, T\mu) = \theta$.

Iz (m_4) dobijamo

$$m(\mu, T\mu) - m_{\mu T\mu} \preceq m(\mu, \mu_n) - m_{\mu \mu_n} + m(\mu_n, T\mu) - m_{\mu_n T\mu},$$

za svako $n \in N$.

Dakle, imamo da je

$$m(\mu, T\mu) - m_{\mu T\mu} \preceq m(\mu, \mu_n) + m(\mu_n, T\mu) =$$

$$= m(\mu, \mu_n) + m(T\mu_{n-1}, T\mu) \preceq m(\mu, \mu_n) + k\big[m(\mu_{n-1}, T\mu_{n-1}) + m(\mu, T\mu)\big] =$$

$$= m(\mu, \mu_n) + k\, m(\mu_{n-1}, \mu_n) + k\, m(\mu, T\mu),$$

odakle je

$$(e - k)m(\mu, T\mu) - m_{\mu T\mu} \preceq m(\mu, \mu_n) + k\, m(\mu_{n-1}, \mu_n),$$

što implicira da je

$$(e-k)m(\mu, T\mu) \preceq \theta.$$

Množenjem poslednje nejednakosti sa

$$(e-k)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} k^i \geq 0,$$

dobijamo da je $m(\mu, T\mu) \preceq \theta$, odakle je,

$$m(\mu, T\mu) = \theta. \tag{5.5}$$

Po uslovu (5.1), imamo da je

$$m(T\mu, T\mu) \preceq k\Big[m(\mu, T\mu) + m(\mu, T\mu)\Big] = 2k\, m(\mu, T\mu),$$

pa iz (5.5) dobijamo

$$m(T\mu, T\mu) = \theta. \tag{5.6}$$

Na osnovu (5.2), (5.5) i (5.6) sledi

$$m(\mu, \mu) = m(T\mu, T\mu) = m(\mu, T\mu).$$

Korišćenjem (m_1) dobijamo da je $T\mu = \mu$. Na kraju, pokazaćemo da preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Pretpostavimo da je ν druga nepokretna tačka preslikavanja T. Iz (5.1), dobijamo da je

$$m(\mu, \nu) = m(T\mu, T\nu) \preceq k\Big[m(\mu, T\nu) + m(\nu, T\nu)\Big] = k\Big[m(\mu, \mu) + m(\nu, \nu)\Big].$$

Na osnovu (5.2) imamo da je

$$m(\mu,\nu)=\theta,$$

odakle je $\mu=\nu$. Dakle, pretpostavka da postoje dve nepokretne tačke preslikavanja T je bila pogrešna. Prema tome, μ je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T. $\square$

Teorema 5.2. ([33]) Neka je (X,m) θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A i neka je $T:X\to X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov

$$m(T\mu,T\nu)\preceq k[m(\mu,T\nu)+m(T\mu,\nu)], \tag{5.7}$$

za sve $\mu,\nu\in X$, pri čemu je $\rho(k)<1$. Tada T ima jedinstvneu nepokretnu tačku.

Dokaz. Neka je $\mu_0\in X$ proizvoljna tačka i definišimo niz $\mu_n=T\mu_{n-1}$, za svako $n\in N$.

Iz (5.7), i (m_4), dobijamo

$$m(\mu_{n+1},\mu_n)=m(T\mu_n,T\mu_{n-1})\preceq k\Big[m(\mu_n,\mu_n)+m(\mu_{n+1},\mu_{n-1})\Big]\preceq$$

$$\preceq k\Big[m(\mu_n,\mu_n)+m(\mu_{n+1},\mu_n)-m_{\mu_{n+1}\mu_n}+m(\mu_n,\mu_{n-1})-m_{\mu_n\mu_{n-1}}+m_{\mu_{n+1},\mu_{n-1}}\Big]\preceq$$

$$\preceq k\Big[m(\mu_n,\mu_n)+m(\mu_{n+1},\mu_n)-m(\mu_{n+1},\mu_{n+1})+m(\mu_n,\mu_{n-1})-m(\mu_n,\mu_n)+$$

$$+m(\mu_{n+1},\mu_{n-1})\Big]=k\Big[m(\mu_{n+1},\mu_n)+m(\mu_n,\mu_{n-1})\Big].$$

Dakle,

$$(e-k)m(\mu_{n+1},\mu_n) \preceq km(\mu_n,\mu_{n-1}).$$

Kako je $\rho(k)<1$, to na osnovu Leme 3.3 sledi da je $e-k$ invertibilan.

Iz poslednje relacije imamo

$$m(\mu_{n+1},\mu_n) \preceq k(e-k)^{-1}m(\mu_n,\mu_{n-1}).$$

Ako stavimo da je

$$h = k(e-k)^{-1}$$

očigledno je da tada važi

$$m(\mu_{n+1},\mu_n) \preceq h\, m(\mu_n,\mu_{n-1}),$$

Stoga

$$\rho(h) = \rho\Big(k(e-k)^{-1}\Big) \leq \rho(k)\cdot\rho\Big((e-k)^{-1}\Big) \leq \frac{\rho(k)}{1-\rho(k)} < 1$$

pa je $e-h$ invertibilan. Nastavljajući na isti način, dobićemo

$$m(\mu_n,\mu_{n+1}) \preceq h^n m(\mu_0,\mu_1).$$

Uslovi (i), (ii), (iii) iz Leme 2.18 su zadovoljeni.

Štaviše, za svako $n,m\in N$, $n>m$, imamo da je

$$m(\mu_n,\mu_m) - m_{\mu_n\mu_m} \preceq m(\mu_n,\mu_{n+1}) - m_{\mu_n\mu_{n+1}} + m(\mu_{n+1},\mu_m) - m_{\mu_{n+1}\mu_m} \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1}) + m(\mu_{n+1},\mu_m) \preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})-m_{\mu_{n+1}\mu_{n+2}}+m(\mu_{n+2},\mu_m)-m_{\mu_{n+2},\mu_m}\preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})+m(\mu_{n+2},\mu_m)\preceq$$

$$\preceq m(\mu_n,\mu_{n+1})+m(\mu_{n+1},\mu_{n+2})+m(\mu_{n+2},\mu_{n+1})+\cdots+m(\mu_{m-1},\mu_m)\preceq$$

$$\preceq h^n m(\mu_0,\mu_1)+h^{n+1}m(\mu_0,\mu_1)+\cdots+h^{m-1}m(\mu_0,\mu_1)=$$

$$=h^n\Big[e+h+h^2+\cdots+h^{m-n-1}\Big]m(\mu_0,\mu_1)=(e-h)^{-1}h^n m(\mu_0,\mu_1),$$

jer je, kako smo pokazali, $r(h)<1$. Prema Propoziciji 2.1 sledi da je

$$(e-h)^{-1}=\sum_{i=0}^{+\infty}h^i,\quad m\to+\infty.$$

S obzirom na Napomenu 2.3, imamo da je

$$\|h^n m(\mu_0,\mu_1)\|\leq\|h^n\|\,\|m(\mu_0,\mu_1)\|\to 0,$$

kada $n\to+\infty$, a prema Lemi 3.6, imamo da je $\{h^n m(\mu_0,\mu_1)\}$ c-niz. Koristeći Lemu 3.2 i Lemu 3.7, sledi da je $\{\mu_n\}$ θ-Košijev niz u X. Budući da je (X,m) θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom, to postoji $\mu\in X$ tako da je

$$\lim_{n\to+\infty}m(\mu_n,\mu)=\lim_{n,m\to+\infty}m(\mu_n,\mu_m)=m(\mu,\mu)=\theta. \tag{5.8}$$

Takođe, $\mu_n\to\mu$, kada $n\to+\infty$ za neko μ. Dakle,

$$m(\mu_n,\mu)-m_{\mu_n\mu}\to\theta,\quad n\to+\infty$$

i

$$M_{\mu_n\mu}-m_{\mu_n\mu}\to\theta,\quad n\to+\infty.$$

Koristeći (ii) iz Leme 2.18, dobijamo $m(\mu_n,\mu_n)\to\theta$, kada $n\to+\infty$, a takođe važi

$$m_{\mu_n\mu}=\min\left\{m(\mu_n,\mu_n),m(\mu,\mu)\right\}\to\theta,\ \ n\to+\infty$$
$$\text{i}\ \ m_{\mu_nT\mu}=\min\Big\{m(\mu_n,\mu_n),m(T\mu,T\mu)\Big\}\to\theta,\ \ n\to+\infty.$$

Dalje ćemo pokazati da je $m(\mu,T\mu)=\theta$. Iz (m_4), dobijamo da je

$$m(\mu,T\mu)-m_{\mu T\mu}\preceq m(\mu,\mu_n)-m_{\mu\mu_n}+m(\mu_n,T\mu)-m_{\mu_nT\mu},$$

za svako $n\in N$. Dakle, imamo da je

$$m(\mu,T\mu)-m_{\mu T\mu}\preceq m(\mu,\mu_n)+m(\mu_n,T\mu)=m(\mu,\mu_n)+m(T\mu_{n-1},T\mu)\preceq$$

$$\preceq m(\mu,\mu_n)+k\big[m(\mu_{n-1},T\mu)+m(T\mu_{n-1},\mu)\big]=$$

$$=m(\mu,\mu_n)+k\,m(\mu_{n-1},T\mu)++k\,m(\mu_n,\mu)\preceq$$

$$\preceq m(\mu,\mu_n)+k\big[m(\mu_{n-1},\mu)-m_{\mu_{n-1}\mu}+m(\mu,T\mu)-m_{\mu T\mu}\big]+k\,m(\mu_n,\mu),$$

što implicira da je

$$(e-k)m(\mu,T\mu)\preceq\theta,$$

odnosno

$$m(\mu,T\mu)=\theta.$$

Po uslovu (5.7), imamo da je

$$m(T\mu,T\mu)\preceq k\Big[m(\mu,T\mu)+m(T\mu,\mu)\Big]=2k\,m(\mu,T\mu).$$

Iz (5.8) dobijamo

$$m(T\mu, T\mu) = \theta, \tag{5.9}$$

a iz (5.7), (5.8) i (5.9) sledi da je

$$m(\mu, \mu) = m(T\mu, T\mu) = m(\mu, T\mu).$$

Koristeći (m_1) dobijamo da je $T\mu = \mu$. Na kraju, pokazaćemo da preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Pretpostavimo da je ν neka druga nepokretna tačka preslikavanja T. Iz (5.7) sledi

$$m(\mu, \nu) = m(T\mu, T\nu) \preceq k\Big[m(\mu, T\nu) + m(\nu, T\mu)\Big] =$$

$$= k\Big[m(\mu, \nu) + m(\nu, \mu)\Big], = 2k\, m(\mu, \nu),$$

što implicira da je

$$(e - 2k)m(\mu, \nu) \preceq \theta.$$

A kako je $\rho(k) < 1$, zaključujemo da je

$$m(\mu, \nu) = \theta,$$

odakle sledi da je $\mu = \nu$. Prema tome T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

□

Posledica 5.1. ([33]) Neka je (X, m) θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A i neka je $T : X \to X$ preslikavanje koje zadovoljava uslov

$$m(T\mu, T\nu) \preceq k\, m(\mu, \nu),$$

za sve $\mu, \nu \in X$, pri čemu je $\rho(k) < 1$. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

Primer 5.1. Neka je $A = C_1^R[0,1]$. Definišimo normu na A sa

$$\parallel \mu \parallel = \parallel \mu \parallel_\infty + \parallel \mu' \parallel_\infty,$$

za svako $\mu \in A$. Tada je A realna Banahova algebra sa jedinicom $e = 1$. Skup

$$P = \left\{\mu \in A : \mu \geq 0\right\}$$

je normalan u A. Naglasimo da konus P nije normalan u A (videti [88]). Neka je $X = [0, +\infty)$. Definišimo preslikavanje $m : X \times X \to A$ sa

$$m(\mu, \nu)(t) = \left(\frac{\mu + \nu}{2}\right) e^t,$$

za svako $\mu, \nu \in X$. Tada je (X, m) θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom A. Definišimo preslikavanje $T : X \to X$ sa

$$T\mu = \log\left(1 + \frac{\mu}{2}\right).$$

Kako je $\log(1 + u) \leq u$, za svako $u \in [0, +\infty)$ za svako i $\mu \in X$. Sledi da za svako $\mu, \nu \in X$, dobijamo

$$m(T\mu, T\nu)(t) = \frac{1}{2}\left[\log\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\right] e^t \preceq$$

$$\preceq \left[\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}\right] e^t = \frac{1}{2} m(\mu, \nu)(t),$$

gde je $k = \frac{1}{2}$. Dakle, svi uslovi iz Posledice 5.1 važe, pa T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $\mu = \theta$.

5.1 Primena na postojanje rešenja integralnih jednačina

Razmotrimo klasu neprekidnih funkcija $C\big([0,T],R\big)$ na $[0,T]$, $T>0$. Neka je u $A=C[0,T]$ definisana norma na sledeći način

$$\parallel \mu \parallel = \parallel \mu \parallel_\infty + \parallel \mu^{'} \parallel_\infty .$$

Pri uobičajenom množenju, A je Banahova algebra sa jedinicom $e=1$. Neka je m M-konusna metrika data sa

$$m(\mu,\nu)(t)=\sup_{t\in[a,b]}\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)e^t,$$

za svako $\mu,\nu\in C\big([0,T],\mathrm{R}\big)$. Imajmo u vidu da je $\Big(C\big([0,T],\mathrm{R}\big),m\Big)$ θ-kompletan M-konusni metrički prostor nad Banahovom algebrom $\Big(C[0,T],\mathrm{R}\Big)$.

Teorema 5.3. ([33]) Pretpostavimo da za svako $\mu,\nu\in C\big([0,T],R\big)$ važi

$$\Big|K\big(t,s,\mu(t)\big)+K\big(t,s,\nu(t)\big)\Big|\le\lambda\,|\mu(t)+\nu(t)|\,,\quad t,s\in[0,T]$$

gde je $\lambda\in[0,1)$. Tada integralna jednačina

$$\mu(t)=\int_0^T K\big(t,s,\mu(t)\big)ds, \tag{5.10}$$

gde je $t\in[0,T]$, ima jedinstveno rešenje na $C\big([0,T],\mathrm{R}\big)$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T : X \to X$ sa

$$T\mu(t) = \int_0^T K\big(t, s, \mu(t)\big) ds,$$

za svako $t, s \in [0, T]$. Imamo da je

$$m(T\mu, T\nu)(t) = \left|\frac{T\mu(t) + T\nu(t)}{2}\right| = \left|\int_0^T \left(\frac{K\big(t, s, \mu(t)\big) + K\big(t, s, \nu(t)\big)}{2}\right) ds\right| e^t \preceq$$

$$\preceq \left(\int_0^T \left|\frac{K\big(t, s, \mu(t)\big) + K\big(t, s, \nu(t)\big)}{2}\right| ds\right) e^t \preceq \left(\lambda \int_0^T \left|\frac{\mu(t) + \nu(t)}{2}\right| ds\right) e^t \preceq$$

$$\preceq \left(\lambda \int_0^T \left(\frac{|\mu(t)| + |\nu(t)|}{2}\right) ds\right) e^t \preceq \left(\lambda \sup_{t \in [0,b]} \left(\frac{|\mu(t)| + |\nu(t)|}{2}\right) \int_0^T ds\right) e^t \preceq$$

$$\preceq \lambda\, m(\mu, \nu)(t).$$

Dakle, uslov (5.1) je zadovoljen. Prema tome, svi uslovi Teoreme 5.1 su ispunjeni. Otuda T ima jedinstvenu nepokretnu tačku, što znači da Fredholmova integralna jednačina (5.10) ima jedinstveno rešenje. Ovim je dokaz završen. □

Literatura

[1] Abdeljawad, T., Mlaiki, N., Aydi, H., Souayah, N., *Double controlled metric spaces and some fixed point results,* Mathematics, 6(12), 2018, 320.

[2] Afshari, H., Aydy, H., Karapinar, E., *On generalized* $\alpha - \psi -$ *Geraghty contractions in b-metric spaces,* Georgian Mathmetaical Journal, 27(1) 2020, 9-21.

[3] Agarwal, R.P., Karapinar, E., O' Regan, D., Roland-Lopez-de-Hierro, A.F., *Fixed Point Theory in Metric Type Spaces,* Springer International Publishing Switzerland 2015.

[4] Aleksić, S., Mitrović, Z. D., Radenović, S. , *Picard sequences in b-metric spaces,* Fixed Point Theory, 21(1) 2020, 35-46.

[5] Alamgir, N., Kiran, Q., Isik, H., Aydi, H., *Fixed point results via a Hausdorff controlled type metric,* Advances in Difference Equations, 2020, 24.

[6] Ali, M. U., Kamran, T., Postolache, M., *Solution of Volterra integral inclusion in b-metric spaces via new fixed point theorem,* Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 22(1) 2017, 17-30.

[7] Alsulami, H. H., Karapinar, E., Piri, H., *Fixed points of generalized F-Suzuki type contraction in complete b-metric spaces,* Discrete Dynamics in Nature and Society, 2015(88), 2012, 8.

[8] Aleksić, S., Kadelburg, Z., Mitrović, Z.D., Radenović, S., *A new survey: Cone metric spaces*, Journal of International Mathematical Virtual Institute, 88 2019, 93-121.

[9] Alghamdi, M. A., Hussain, N., Salimi, P., *Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces*, J. Inequal. Appl. 2013, Article ID 402.

[10] Ameer, E., Aydi, H., Arshad M., De la Sen M., *Hybrid Ćirić type graphic* $(Y, \Lambda)-$ *contraction mappings with applications to electric circuit and fractional differential equations,* Symmetry, 12(3), 2020, 467.

[11] Ansari A. Hojat, Dolicanin- Đekić, D. C, Dosenovic T .M., Radenović S. N., *Coupled Coincidence Point Theorems for* $(\alpha - \mu - \psi - H - F)$*-Two Sided-Contractive Type Mappings in Partially Ordered Metric Spaces Using Compatible Mappings*, Filomat, 31(9) 2017,2657-2673.

[12] Asadi, M., Karapänar, E., Salimi, P., *New extension of* P*-metric spaces with some fixed-point results on* M*-metric spaces*, Journal of Inequalities and Applications 2014, 18.

[13] Atanackovic, T.M., Pilipović S., Selesi D., *Stochatic Zener model with complex order fractional derivatives*, Mathematics and Mechanics of Solid, 28(2), 2022 .

[14] Atanackovic, T.M., Janev M., Pilipović S., Selesi D., *Viscoelasticity of Fractional Order: New Restrictions on Constitutive Equations with Ap-*

plications, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 20, 2020, 13.

[15] Atanackovic, T.M., Đekić-Dolićanin, D., Gilić, E., Kačapor, E., *On a Generalized Wave Equation with Fractional Dissipation in Non-Local Elasticity*, Mathematics, 11(18), 2023 3850 .

[16] Aydi, H., Felihi, A., Karapinar, E., Sahmim, S. , *A Nadler-type fixed point theorem in dislocited spaces and applications*, Miskolc Mathematical Notes, 19, 2018, 111-124.

[17] Aydi, H., Bota, M. F., Karapinar, E., Mitrović, S., *A fixed point theorem for set-valued quasicontractions in b-metric spaces,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2012, 88.

[18] Aydi, H., Lakzain, H., Mitrović, Z.D., Radenović, S., *Best proximity points of MF-cyclic contractions with property UC,* Numerical Functional Analysis and Optimization, 41(7), 2020, 1-12.

[19] Banach, S. , *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,* Fundamenta Mathematicae, 3, 1922, 133-181.

[20] Bakhtin, I. A., *The contraction mapping principle in quasimetric spaces,* Funct. Anal. Ulianowsk Gos. Ped. Inst., 3, 1989, 26-37.

[21] Boriceany, M., Bota, M., Petrusel, A., *Multivalued fractals in b-metric spaces,* Central European Journal of Mathematics, 8(2), 2010, 367–377.

[22] Brouwer, L.E.J., *Uber abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen 71, 1910, 97-115.

[23] Ćirić, Lj.,*Some Recent Results in Metrcal Fixed Point Theory,* University of Belgrade, Beograd, 2003, Serbia.

[24] Collaco, P., Silva, J.C., *A complete comparison of 25 contraction conditions*, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, 30(1), 1977, 471-476.

[25] Czerwik, S., *Contraction mappings in b-metric spaces,* Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1(1), 1993, 5-11.

[26] De la Sen, M., Nikolić, N., Došenović M. Pavlović, T., Radenović, S. , *Some results on* $(s-q)$ *−graphic contraction mappings in b-metric-like spaces,* Mathematics,7(12), 2019, 1190.

[27] Dolicanin-Đekic, D., *On Some Ciric Type Results in Partial b-Metric Spaces*, Filomat, 31(11), 2017, 3473-3481.

[28] Đekic-Dolicanin, D., Došenović, T., Huang, H., Radenović, S., *A note on recent cyclic fixed point results in dislocated quasi-b-metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2016, 74.

[29] Djordjevic, D. S., *Frechet Derivative and Analytic Functional Calculus*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43(2), 2020, 1205–1212.

[30] Dung, N.V., Hang, V. I., *A fixed point theorem for generalized F-contraction on complete metric spaces,* Vietnam Journal of Mathematics, 43(4), 2015, 743-753.

[31] Dung, N.G., Hang V.T.L., Djekic-Dolicanin D., *An equivalence of results in* C^**-algebra valued b-metric and b-metric spaces*, Applied General Topology, 18(2), 2017, 241-253.

[32] Fabiano, N., Došenović, T., Rakić, D., Radenović S., *Some new results on (s,q)- Dass-Gupta-Jaggi type contractive mappings in b-metric-like spaces*, in press Filomat 34(12), 2020, 4015–4026.

[33] Fernandez, J., Malviya, N., Gilic, E., *Fixed Point Results in M-Cone Metric Space Over Banach algebra with an Applications*. Filomat. 36(16), 2022, 5547–5562.

[34] Fernandez, J., Malviya, N., *Partial cone metric spaces over Banach algebra and Generalized Lipschitz mappings with applications*, Selected for Young Scientist Award 2016 M.P., India.

[35] Fernandez, J., Malviya N., Djekic-Dolićanin D., Pučić D., *The p_b-cone metric spaces over Banach algebra with applications*, Filomat, 34(3), 2020, 983–998.

[36] Frechet, M., *Sur quelques points du calcul fonctionnel,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1906, 1-74.

[37] Geraghty, M. , *On contractive mappings,* Proc. Am. Math. Soc., 40, 1973, 604-608.

[38] Gilic, E., Dolicanin Djekic D., Mitrovic, Z., Pucic, Dz., Aydi H. *On Some Recent Results Concerning F-Suzuki-Contractions in b-Metric Spaces*. Mathematics, 8(6) 2020, 940.

[39] Hammad, H.A., De la Sen, M., *Generalized contractive mappings and related results in b-metric like spaces with an application*, Symmetry, 11(5), 2019, 667.

[40] Hammad, H.A., De la Sen, M., *Solution of nonlinear integral equation via fixed point of cyclic α_s^q rational contraction mappings in metric-like*

spaces, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 51, 2020, 81-105.

[41] Hammad, H. A., De la Sen M., *Fixed-point results for a generalized almost* $(s, q) -$*Jaggi F-contraction-type on b-metric-like spaces,* Mathematics, 8(1), 2020, 63.

[42] Hadžić, O., Pilipović, S., *Uvod u Funkcionalnu Analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno -matematički fakultet, Novi Sad 1996.

[43] Hadžić, O., *Fixed point theory in topological vectors spaces*, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1984.

[44] Harandi, A. A., *Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed points,* Fixed Point Theory and Applications, 2012, 204.

[45] Huang, H., Radenović, S., *Common fixed point theorems of Generalized Lipschitz mappings in cone metric spaces over Banach algebras*, Applied Mathematics & Information Sciences, 9(6), 2015, 2983-2990.

[46] Huang, L.G,.Xian, Z., *Cone metric spaces and fixed point theorems for contractive mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332(2), 2007, 1468-1476.

[47] Hui-Sheng Ding, Imdad, M., Radenović, S., Vujaković, J., *On some fixed point results in b-metric, rectangular and b-rectangular metric spaces,* Arab Journal of Mathematical Sciences, 22 (2), 2016, 151-164.

[48] Hussain, N., Roshan, J. R., Parvaneh, V., Kadelburg, Z., *Fixed points of contractive mappings in bmetric-like spaces*, The Scientific World Journal, 2014, Article ID 471827.

[49] Huang, H., Dolicanin-Djekic, D., Deng G., *On some recent fixed point results for (ψ, ϕ)-contractive mappings in ordered partial b-metric spaces*, Journal of Nolinear Sciences and Applications 9(7), 2016 4990-4999.

[50] Ilić, D., Rakočević, V., *Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2014.

[51] Ilić, D., Rakočević, V.f, *Iterativne metode u teoriji nepokretne tačke*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2015.

[52] Jovanović, M., Kadelburg, Z., Radenović, S., *Common fixed point results in metric type spaces,* Fixed Point Theory Appl., 2010 Article ID 978121, 15 pp.

[53] Karapinar, E.,Khojasteh, F., *Super Metric Spaces*, Filomat, 36(10), 2022, 3545-3549 .

[54] Karapinar, E., Fulga, A., *Contraction in Rational Forms in the Framework of Super Metric Spaces*, Mathematics, 10(17), 2022, 3077.

[55] Karapinar, E., Czerwik, S., Aydi, H ., *(α, ψ)-Meir Keeler contraction mappings in generalized b-metric spaces* Journal of Functional Analysis Spaces, 2018, Art. ID 3264620.

[56] Kadelburg, Z., Radenović, S., *A note on various types of cones and fixed point results in cone metric spaces*, Asian Journal of Mathematics and Applications, 2013, Art. ID 56015182.

[57] Kir, W.A., Shahzad, N., *Fixed Point Theory in Distance Spaces*, Springer International Publishing Switzerland 2014.

[58] Kurepa, Đ.,*Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés*, C.R. Acad. Sci. Paris 198 (1934), 1563–1565.

[59] Mehmood, N., Azam, A., Kočinac, Lj.D.R., *Multivalued fixed point results in cone metric spaces*, Topology and its Applications 179, 2015, 156–170.

[60] Mehmood, N., Azam, A., Kočinac, Lj.D.R., *Multivalued $\mathcal{R}_{\psi,\phi}$-weakly contractive mappings in ordered cone metric spaces with applications*, Fixed Point Theory 18(2) 2017, 673–688.

[61] Aslam Khan, M. N., Azam A. , Kočinac Lj.D.R., *Coincidence of multivalued mappings on metric spaces with a graph*, Filomat, 31(14), 2017, 4543–4554

[62] Kolundžija, M.Z., Mosić, D. Đorđević, S.D. *Generalized Drazin inverse of certain block matrices in Banach algebras*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 41(2), 2015, 529–542.

[63] Liu, H., Xu, S., *Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2013, 320.

[64] Liu. H, Xu, Z. *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332, 2007, 1468–1476.

[65] Mahmood, Q., Shahzad, A., Shoab, A., Ansari, A. H., Radenović S., *Common fixed point results for $\alpha-\psi-$contractive mappings via (F,h) pair of upper class functions,* Journal of Mathematical Analysis, 10(4), 2019, 1-10.

[66] Matthews, S. G., *Partial metric topology, general topology and its applications,* Annals of the New York Academy of Sciences journal - Wiley, 728, 1994,183-197.

[67] Mamuzić, Z.P., *Uvod u Opstu Topologiju*, Beograd, 1960.

[68] Miculescu, R., Mihail, A., *New fixed point theorems for set-valued contractions in b-metric spaces,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19(3), 2017, 2153-2163.

[69] Milovanović E. I., Matejić M.M., Milovanović I. Ž., *On the normalized Laplacian spectral radius, Laplacian incidence energy and Kemany's constant,* Linear Algebra and its Applications, 582(1), 2019, 181-196.

[70] Mitic B., Milovanovic E. I., Matejic M. M., Milovanovic I. Z., *Some Properties of the Inverse Degree Index and Coindex of Trees* Filomat 36(7), 2022, 2143-2152.

[71] Mitrović, Z. D., Radenović S., *The Banach and Reich contractions in $b_v(s)-$metric spaces,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 19 (4), 2017, 3087-3095.

[72] Mitrović., Z. D., *A note on the result of Suzuki, Miculescku and Mihail,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 24 2019, 21.

[73] Mlaiki, N., Aydi, H., Souayah, N., Abdeljawad, T., *Controlled metric type spaces and the related contraction principle,* Mathematics, 6 (10), 2018, 194.

[74] Palais, R.S., *A simple proof of the Banach contraction principle*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2, 2007, 221-223.

[75] Parvaneh, V., Haddadi, M.R., Aydi H. *On Best Proximaty Point Results for Some type of Mappings,* Journal of Function Spaces. vol. 2020, Art. ID 6298138

[76] Petrović-Torgašev M., *A Property of Closed Finite Type Curves*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 77, 2008 145-149.

[77] Petrović-Torgašev M., Pantić, M., *Some Properties of* $\delta(2,2)$ *Chen Ideal Submanifolds.* Filomat, 31(7), 2017, 2163-2166.

[78] Piri, H., Kumam, P., *Fixed point theorems for generalized F-Suzuki-contraction mappings in complete b-metric spaces,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2016, 90.

[79] Piri, H., Kumam, P., *Some fixed point theorems concerning in complete metric spaces ,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2014, 210.

[80] Prasad, B.,Singh, B., Sahni, R. *Some approximate fixed point theorems*, International Journal of Mathematical Analysis, 3(5), 2009, 203-210.

[81] Qawaqneh, H., Noorani, M.S.M., Shatanawi, W., Aydi, H. Alsamir, H., *Fixed point results for multi-valued contractions in b-metric spaces and applications* , Mathematics, 7(2), 2018, 132.

[82] Radenović, S., *Classical fixed point results in* 0*-complete partial metric spaces via cyclic-type extension,* Bulletin of The Allahabad Mathematical Society, 31(1), 2016, 39-55.

[83] Radenović, S., *Coupled fixed point theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces*. Kragujevac Journal of Mathematics, 38(2), 2014, 249–257.

[84] Rezapour S., Hamlbarani R., Some notes on the paper, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 345, 2008, 719-724.

[85] Mohammadi B., Rezapour S., Shahzad N., *Some results on fixed points of $\alpha - \psi$-Ciric generalized multifunctions*, Fixed Point Theory and Applications, 2013, 24.

[86] Haghi R.H., Rezapour S., Shahzad N., *Some fixed point generalizations are not real generalizations.* Nonlinear Analysis, 74, 2011, 1799–1803.

[87] Rhoades, B.E., *A comparison of various definitions of contractive mappings,* Transactions of the American Mathematical Society, Transactions of the American Mathematical Society, 226 1977, 257-290.

[88] Rudin, W., *Functional Analysis*, 2nd Edn. McGraw-Hill, New York 1991.

[89] Secelean, N.A., *Iterated function systems consisting of F-contraction in complete metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2013, 277.

[90] Shukla, S., Radenović, S., Rajić, V. Ć., *Some common fixed point theorems in $0-\sigma-$complete metric-like spaces,* Vietnam Journal of Mathematics, 41(3), 2013, 341-352.

[91] Shukla, S. , *Partial b-metric spaces and fixed point theorems,* Mediterranean Journal of Mathematics, 11, 2014, 703-711.

[92] Suzuki, T., *Basic inequality on a b-metric space and its applications,* Journal of Inequalities and Applications, 2017, 256.

[93] Vujaković, J., Aydi, H., Radenović, S. , *Some remarks and new results in ordered partial b-metric spaces,* Mathematics, 7(4), 2019, 334.

[94] Wardowski, D., *Fixed point theory of a new type of contractive mappings in complete metric spaces,* Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2012, 94.

[95] Wardowski, D., Dung, N.V., *Fixed points of F-weak contractions on complete metric spaces,* Demonstratio Mathematica, 47(1), 2014, 146-155.

[96] Xu, S. and Radenović S., *Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality*, Fixed Point Theory and Applications, 2014, 102.

[97] Younis, M., Singh, D., Radenović, S., Imdad, M., *Convergence theorems via generalized contractions and its applications,* in press Filomat, 34(3), 2020, 945–964.

[98] Yu, D., Chen, C., Wang, H., *Common fixed point theorems for* $(T, g)_F$ *−contraction in b-metric-like spaces,* Journal of Inequalities and Applications 2018, 222.

[99] Zhou M., Liu Xiao-lan, Dolićanin-Đekic D., Damjanovic B., *Coupled coincidence point results for Geraghty-type contraction by using monotone property in partially ordered S-metric spaces*, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9(12), 2016, 5950-5969.

Biografija

Ersin Gilić je rođen 05. 08. 1994. godine u Sjenici, gde je završio osnovnu i srednju školu. Diplomirao je 2017. godine na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, studijski program Matematika. Master akademske studije je završio 2018. godine na Državnom univerzitetu u Novom Pazaru na Departmanu za matematičke nauke, studijski program Matematika. Doktorske akademske studije je upisao 2018. godine takođe na Departmanu za matematičke nauke Državnog univerziteta u Novom Pazaru, studijski program Matematika.

Ersin Gilić je radio na Državnom univerzitetu u Novom Pazaru kao saradnik u nastavi od 2019. do 2021. godine, a od 2021. godine do danas radi kao asistent.

Pored toga, Ersin Gilić do sada ima objavljen jedan rad u časopisu kategorije M21a, dva rada u časopisu kategorije M22, dva saopštenja sa međunarodnih skupova štampana u izvodu (kategorija M34) i dva saopštenja sa nacionalnih naučnih skupova štampana u izvodu (kategorija M64) što ukupno čini 7 bibliografskih jedinica.

Naučni radovi objavljeni u naučnim časopisima međunarodnog značaja (M20)

1. Gilic E, Dolicanin Djekic D, Mitrovic Z, Pucic Dz, Aydi H. On Some Recent Results Concerning F-Suzuki-Contractions in b-Metric Spaces. Mathematics. 2020; 8: 940. doi: https://doi.org/10.3390/math8060940, M21a

2. Dolicanin Djekic D, Gilic E. Characterisations of Bounded Linear and Compact Operators on the Generalised Hahn Space. Filomat. 2022; 36 (2): 497–505. doi: https://doi.org/10.2298/FIL2202497D, M22

3. Fernandez J, Malviya N, Gilic E, Fixed Point Results in M-Cone Metric Space Over Banach algebra with an Applications. Filomat. 2022; 36 (16): 5547–5562. doi: https://doi.org/10.2298/FIL2216547F, M22

Zbornici međunarodnih naučnih skupova (M30)

4. Ersin Gilić, Diana Dolićanin Đekić, Zoran D. Mitrović, Dženis Pučić, Hassen Aydi, Simpler proofs of some recent results of F-Suzuki contraction in b-metric spaces, The 6th International Conference, CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, 21–22 September 2020, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia, 38, M34

5. Ersin Gilić, Jerolina Fernandez, Neeraj Malviya, Application of the fixed point in M-cone metric space over Banach algebra, The 7th International Conference, CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS, MECHANICS AND INFORMATICS, 6–8 June 2020, State University of Novi Pazar, Novi Pazar, Serbia, 31, M34

Zbornici nacionalnih naučnih skupova (M60)

6. Ersin Gilić, Diana Dolićanin Đekić, Bandar Bin-Mohsin, Some new fixed point results for covnex contractions in b-metric spaces , Kongres mladih matematičara u Novom Sadu, 3–5. oktobra 2019. godine, Novi Sad, Srbija, Srpsko naučno matematičko društvo, 20, M64

7. Ersin Gilić, Jerolina Fernandez, Neeraj Malviya, Some fixed point results of M-cone metric space over Banach algebra and applicationn, Kongres mladih matematičara u Novom Sadu, 29.09.-01.10. 2022 godine, Novi Sad, Srbija, Srpsko naučno društvo, 24, M64